



Ministério da Ciência e Tecnologia  
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

# Módulo

# Geoestatística Linear

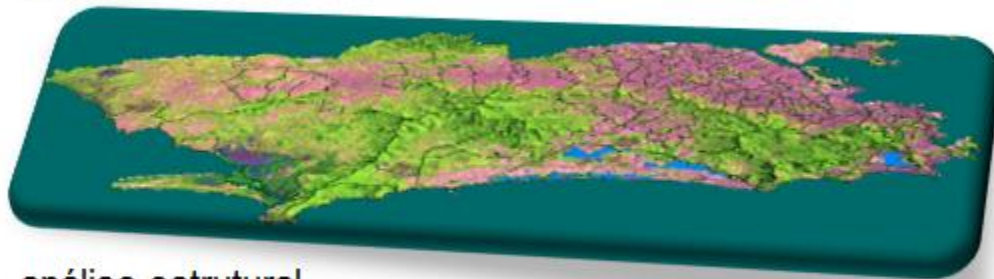
Eduardo Camargo

DPI

Prédio SERE II - Sala 66 - Ramal: 6524

[eduardo.camargo@inpe.br](mailto:eduardo.camargo@inpe.br)

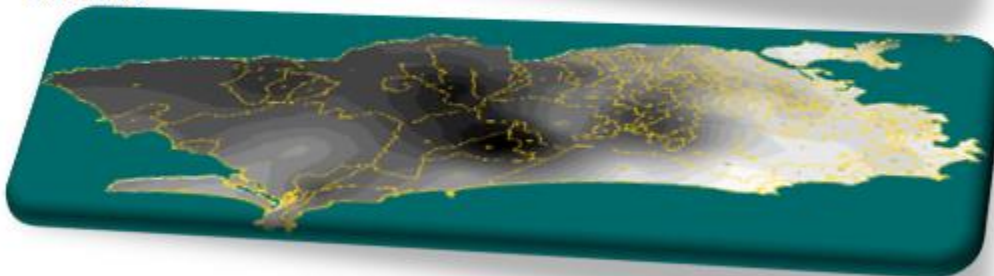
realidade



análise estrutural



cenário



## Palavras-chave

variáveis regionalizadas

semivariograma empírico

efeito pepita, alcance e patamar

análise estrutural

isotropia e anisotropia

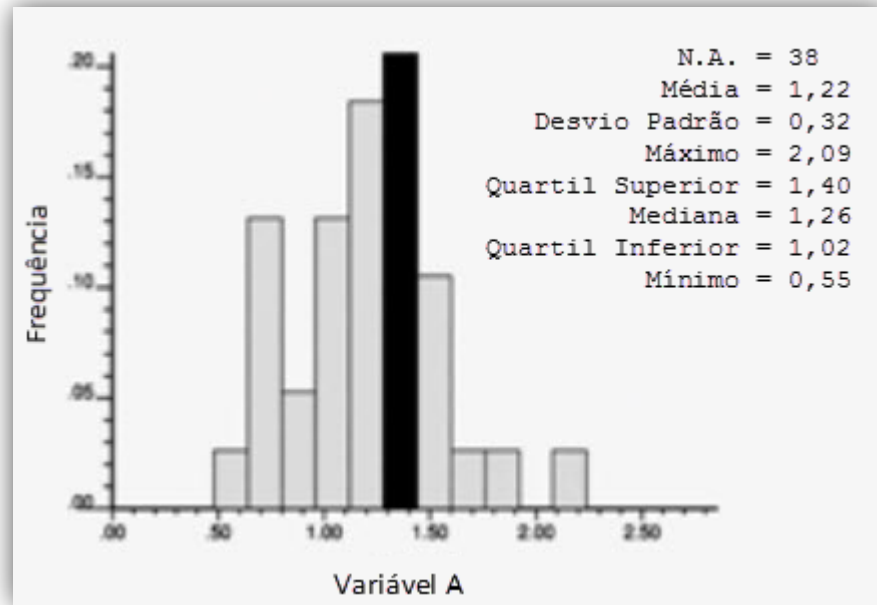
validação cruzada

krigeagem

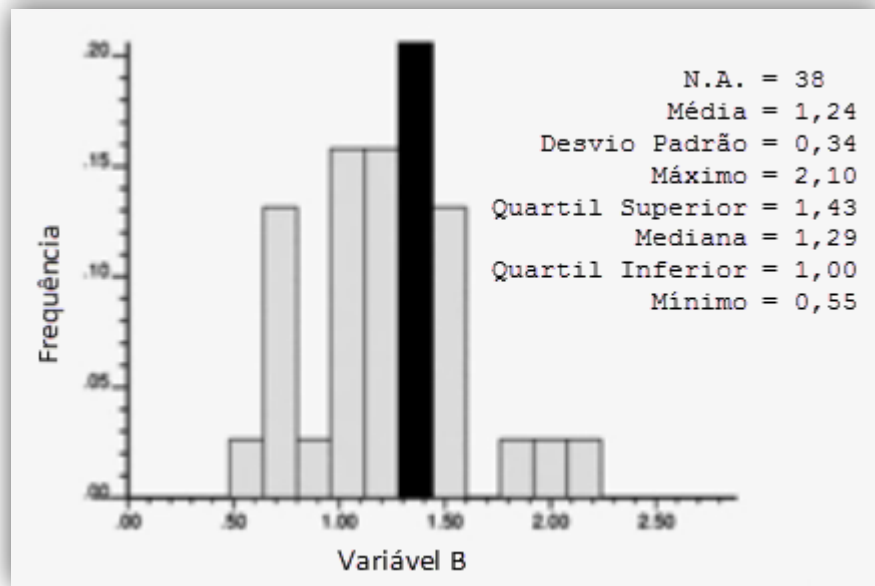
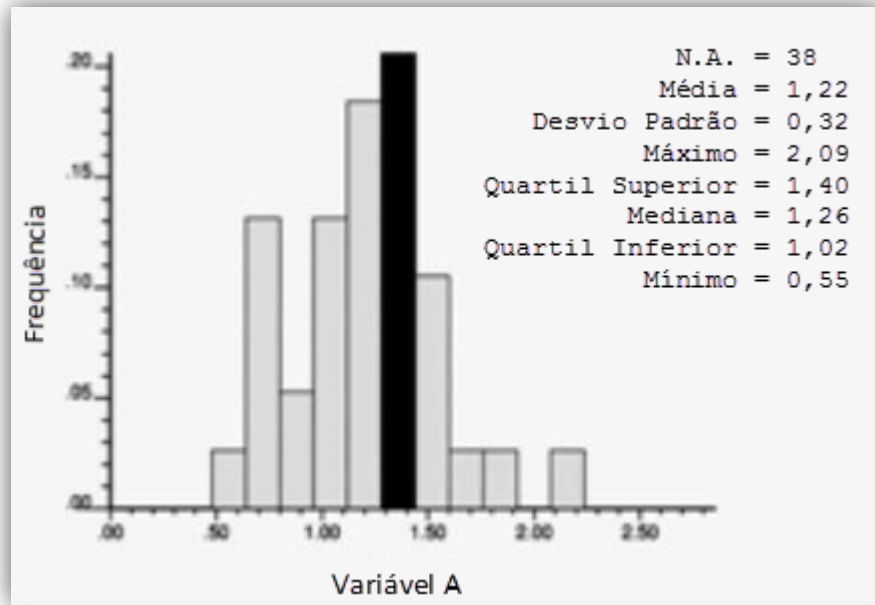
1. Introdução e Motivação
2. Principais conceitos teóricos
3. A função variograma
4. Modelos teóricos de variograma
5. Isotropia e Anisotropia
6. Modelagem da anisotropia
7. Validação cruzada
8. Krigeagem linear
9. Integração da geoestatística no sistema SPRING

A	B
0,8	1,95
0,72	2,1
0,69	1,3
0,8	1,4
0,73	0,73
1,19	1,5
0,94	1,85
0,96	1,41
1,05	1,2
1,32	1,32
1,02	1,6
1,2	1,57
1,1	1,1
1,18	1,18
1,3	1,31
1,55	1,55
1,57	1,2
1,3	1,3
1	0,76
1,18	1,18
1,4	1,4
1,3	1,3
1,5	1,45
1,4	1,4
1,85	1
1,2	1,05
1,23	1,23
1,3	1,3
1,62	1
2,09	0,81
1,6	0,7
1,4	0,8
1,41	0,55
1,38	1,38
1,04	1,04
1,31	0,8
1,28	1,28
0,55	1

A	B
0,8	1,95
0,72	2,1
0,69	1,3
0,8	1,4
0,73	0,73
1,19	1,5
0,94	1,85
0,96	1,41
1,05	1,2
1,32	1,32
1,02	1,6
1,2	1,57
1,1	1,1
1,18	1,18
1,3	1,31
1,55	1,55
1,57	1,2
1,3	1,3
1	0,76
1,18	1,18
1,4	1,4
1,3	1,3
1,5	1,45
1,4	1,4
1,85	1
1,2	1,05
1,23	1,23
1,3	1,3
1,62	1
2,09	0,81
1,6	0,7
1,4	0,8
1,41	0,55
1,38	1,38
1,04	1,04
1,31	0,8
1,28	1,28
0,55	1



A	B
0,8	1,95
0,72	2,1
0,69	1,3
0,8	1,4
0,73	0,73
1,19	1,5
0,94	1,85
0,96	1,41
1,05	1,2
1,32	1,32
1,02	1,6
1,2	1,57
1,1	1,1
1,18	1,18
1,3	1,31
1,55	1,55
1,57	1,2
1,3	1,3
1	0,76
1,18	1,18
1,4	1,4
1,3	1,3
1,5	1,45
1,4	1,4
1,85	1
1,2	1,05
1,23	1,23
1,3	1,3
1,62	1
2,09	0,81
1,6	0,7
1,4	0,8
1,41	0,55
1,38	1,38
1,04	1,04
1,31	0,8
1,28	1,28
0,55	1

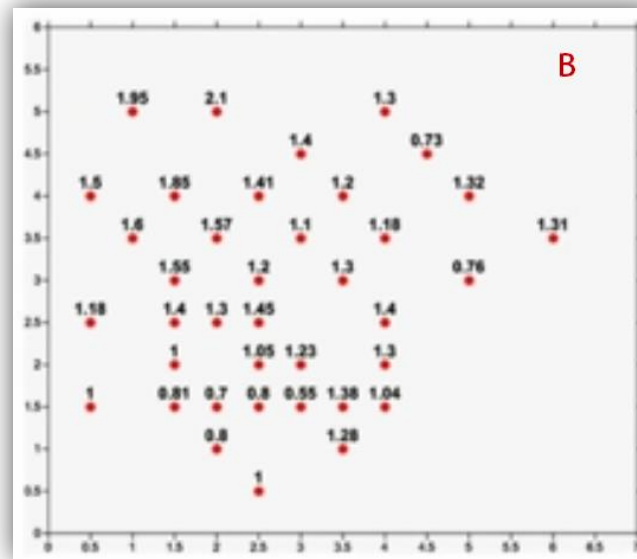
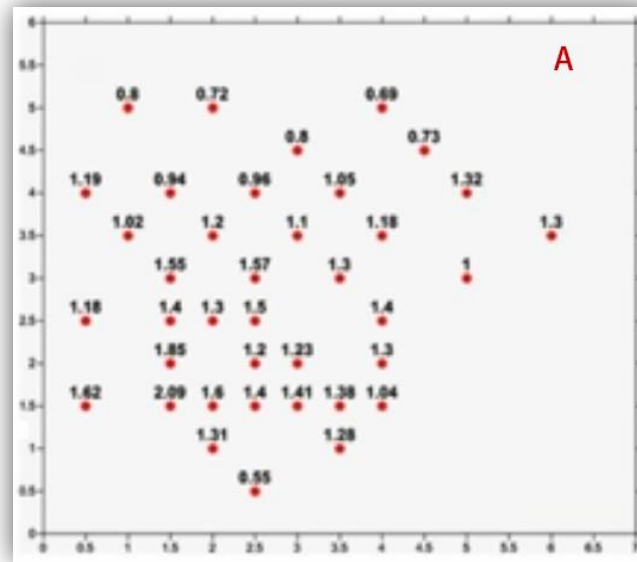


Fonte: Prof. Paulo M. B. Landim - UNESP Rio Claro

X	Y	A	B
1	5	0,8	1,95
2	5	0,72	2,1
4	5	0,69	1,3
3	4,5	0,8	1,4
4,5	4,5	0,73	0,73
0,5	4	1,19	1,5
1,5	4	0,94	1,85
2,5	4	0,96	1,41
3,5	4	1,05	1,2
5	4	1,32	1,32
1	3,5	1,02	1,6
2	3,5	1,2	1,57
3	3,5	1,1	1,1
4	3,5	1,18	1,18
6	3,5	1,3	1,31
1,5	3	1,55	1,55
2,5	3	1,57	1,2
3,5	3	1,3	1,3
5	3	1	0,76
0,5	2,5	1,18	1,18
1,5	2,5	1,4	1,4
2	2,5	1,3	1,3
2,5	2,5	1,5	1,45
4	2,5	1,4	1,4
1,5	2	1,65	1
2,5	2	1,2	1,05
3	2	1,23	1,23
4	2	1,3	1,3
0,5	1,5	1,62	1
1,5	1,5	2,09	0,81
2	1,5	1,6	0,7
2,5	1,5	1,4	0,8
3	1,5	1,41	0,55
3,5	1,5	1,38	1,38
4	1,5	1,04	1,04
2	1	1,31	0,8
3,5	1	1,28	1,28
2,5	0,5	0,55	1



X	Y	A	B
1	5	0,8	1,95
2	5	0,72	2,1
4	5	0,69	1,3
3	4,5	0,8	1,4
4,5	4,5	0,73	0,73
0,5	4	1,19	1,5
1,5	4	0,94	1,85
2,5	4	0,96	1,41
3,5	4	1,05	1,2
5	4	1,32	1,32
1	3,5	1,02	1,6
2	3,5	1,2	1,57
3	3,5	1,1	1,1
4	3,5	1,18	1,18
6	3,5	1,3	1,31
1,5	3	1,55	1,55
2,5	3	1,57	1,2
3,5	3	1,3	1,3
5	3	1	0,76
0,5	2,5	1,18	1,18
1,5	2,5	1,4	1,4
2	2,5	1,3	1,3
2,5	2,5	1,5	1,45
4	2,5	1,4	1,4
1,5	2	1,85	1
2,5	2	1,2	1,05
3	2	1,23	1,23
4	2	1,3	1,3
0,5	1,5	1,62	1
1,5	1,5	2,09	0,81
2	1,5	1,6	0,7
2,5	1,5	1,4	0,8
3	1,5	1,41	0,55
3,5	1,5	1,38	1,38
4	1,5	1,04	1,04
2	1	1,31	0,8
3,5	1	1,28	1,28
2,5	0,5	0,55	1

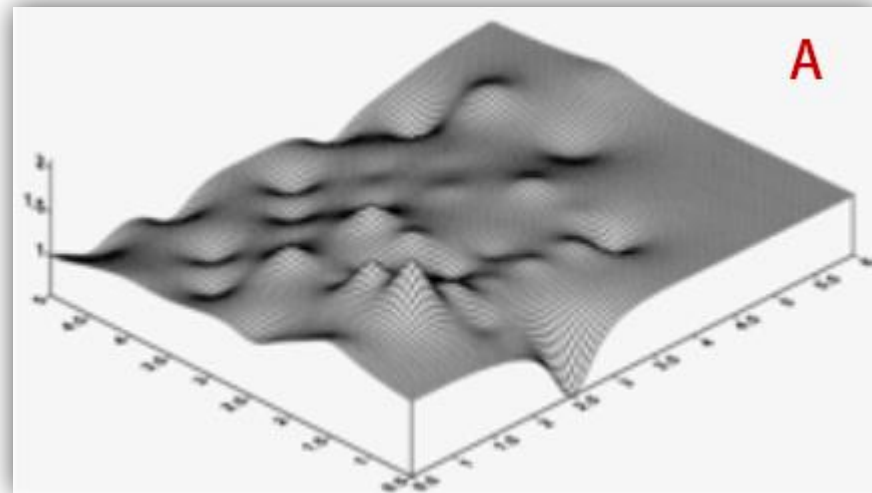


Fonte: Prof. Paulo M. B. Landim - UNESP Rio Claro

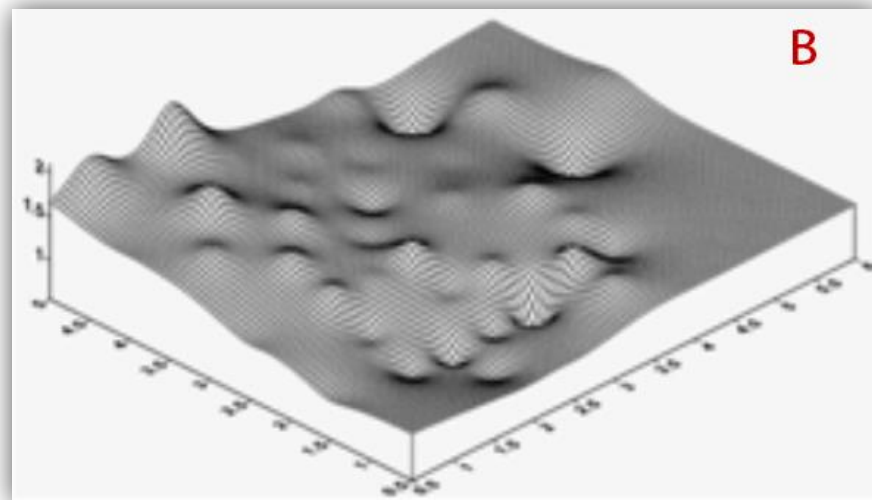


X	Y	A	B
1	5	0,8	1,95
2	5	0,72	2,1
4	5	0,69	1,3
3	4,5	0,8	1,4
4,5	4,5	0,73	0,73
0,5	4	1,19	1,5
1,5	4	0,94	1,85
2,5	4	0,96	1,41
3,5	4	1,05	1,2
5	4	1,32	1,32
1	3,5	1,02	1,6
2	3,5	1,2	1,57
3	3,5	1,1	1,1
4	3,5	1,18	1,18
6	3,5	1,3	1,31
1,5	3	1,55	1,55
2,5	3	1,57	1,2
3,5	3	1,3	1,3
5	3	1	0,76
0,5	2,5	1,18	1,18
1,5	2,5	1,4	1,4
2	2,5	1,3	1,3
2,5	2,5	1,5	1,45
4	2,5	1,4	1,4
1,5	2	1,85	1
2,5	2	1,2	1,05
3	2	1,23	1,23
4	2	1,3	1,3
0,5	1,5	1,62	1
1,5	1,5	2,09	0,81
2	1,5	1,6	0,7
2,5	1,5	1,4	0,8
3	1,5	1,41	0,55
3,5	1,5	1,38	1,38
4	1,5	1,04	1,04
2	1	1,31	0,8
3,5	1	1,28	1,28
2,5	0,5	0,55	1

## Distribuição Espacial da Variável A



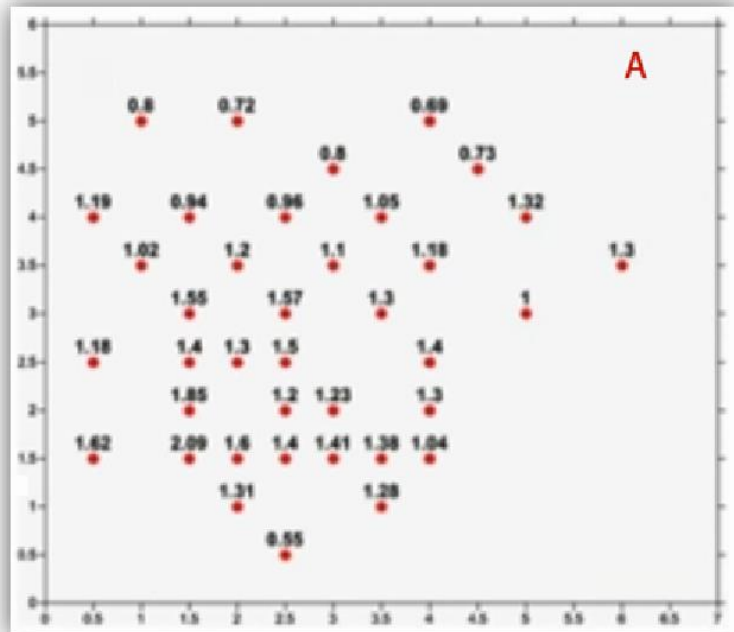
## Distribuição Espacial da Variável B



Fonte: Prof. Paulo M. B. Landim - UNESP Rio Claro

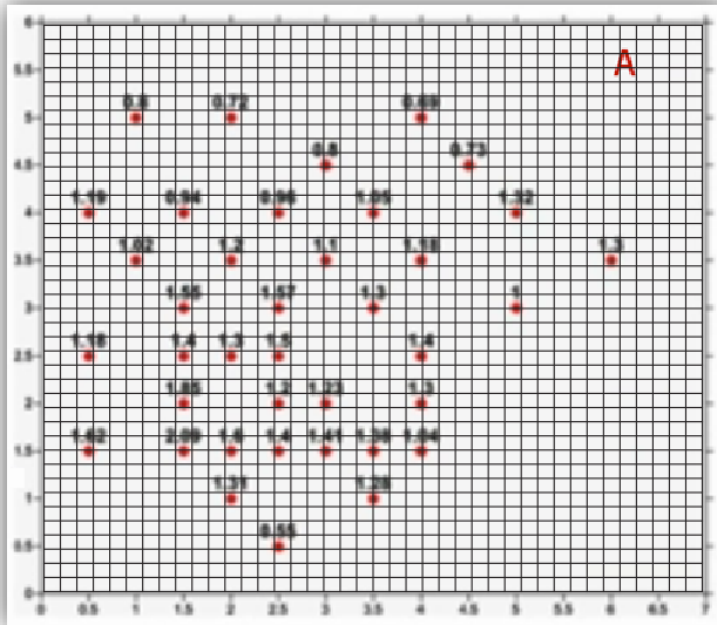
## Interpolação

- Métodos Determinísticos
- Métodos Probabilísticos (ex: Geoestatística)



## Interpolação

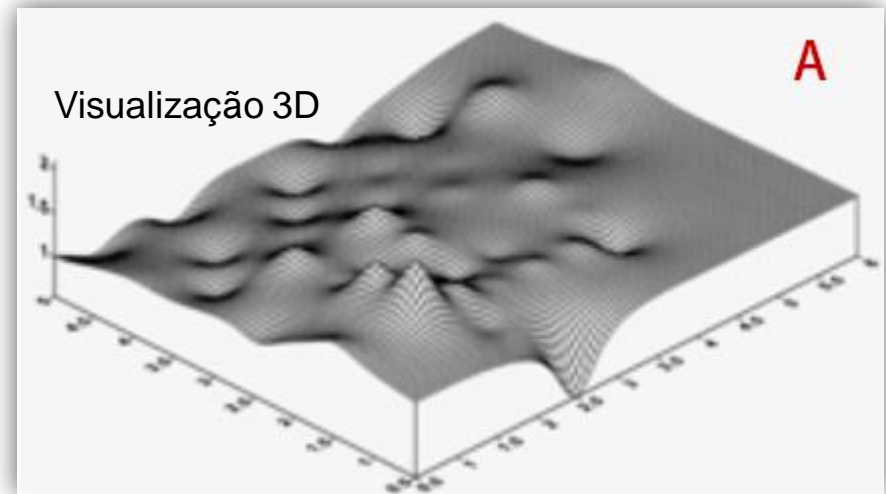
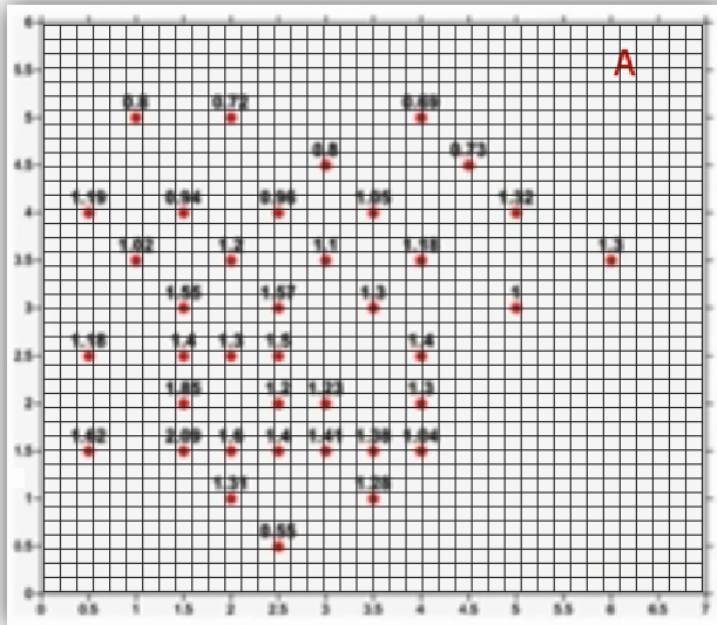
- Métodos Determinísticos
- Métodos Probabilísticos (ex: Geoestatística)



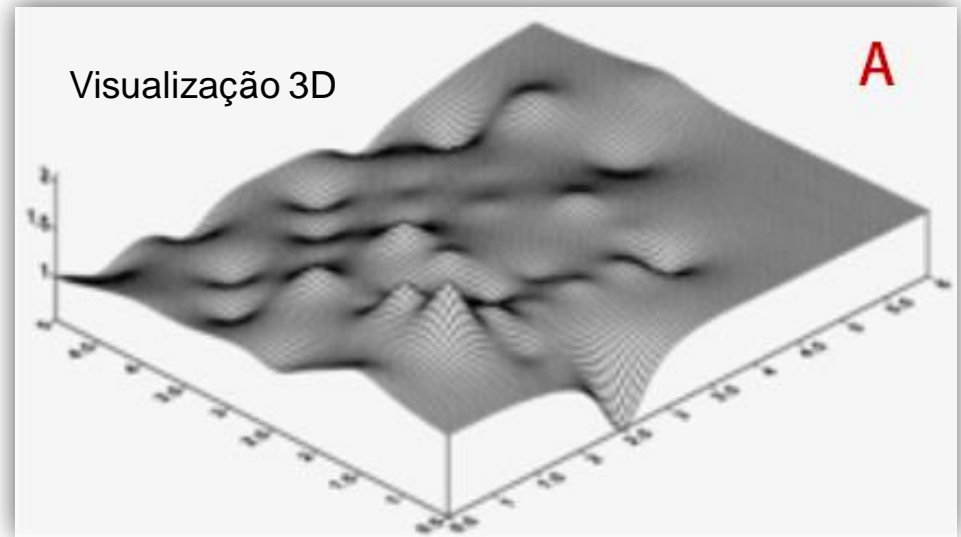
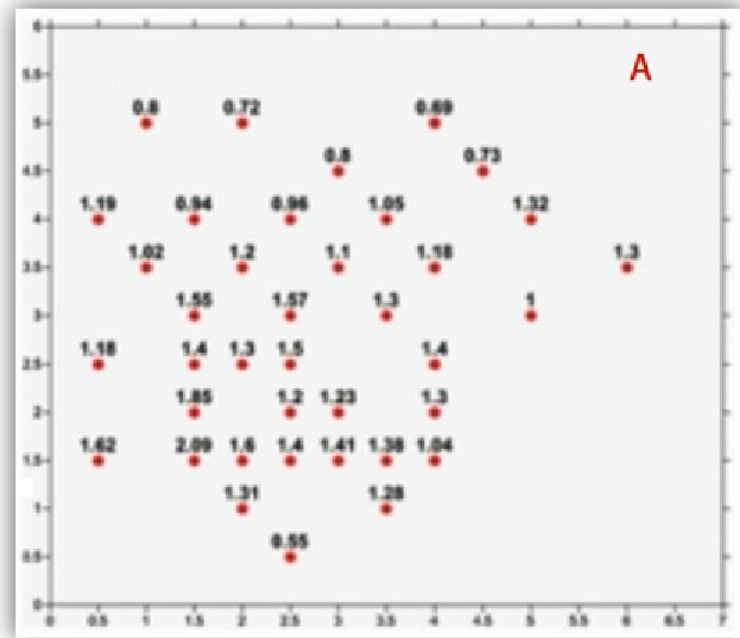
- Grade imposta pelo analista (resX, resY).
- Estimar cada célula da grade.
  - entrada*: são os dados observados com suas respectivas localizações.
  - saída*: uma superfície que representa a variabilidade espacial da variável investigada.

## Interpolação

- Métodos Determinísticos
- Métodos Probabilísticos (ex: Geoestatística)



- Grade imposta pelo analista (resX, resY).
- Estimar cada célula da grade.
  - entrada*: são os dados observados com suas respectivas localizações.
  - saída*: uma superfície que representa a variabilidade espacial da variável investigada.



A idéia central é incorporar o espaço à análise que se deseja fazer.

Mensurar propriedades e relacionamentos, levando em conta a localização espacial do fenômeno em estudo de forma explícita.

## Origem da geoestatística

Os métodos geoestatísticos, ou simplesmente geoestatística, foram desenvolvidos graças aos estudos do engenheiro de minas Georges Matheron na França no início dos anos 60.

A geoestatística está fundamentada na **Teoria das Variáveis Regionalizadas**, a qual foi formalizada por Matheron a partir de estudos práticos desenvolvidos por Daniel G. Krige, no cálculo de reservas nas minas de ouro na África do Sul.

Atualmente a geoestatística é aplicada em vários campos, desde as ciências da Terra e atmosfera, na agricultura, nas ciências dos solos e hidrologia, estudos ambientais e mais recentemente na epidemiologia.

## O que é geoestatística?

É uma abordagem **PROBABILÍSTICA** de modelagem, que engloba um conjunto de métodos estatísticos, para a análise e mapeamento de dados distribuídos no espaço e/ou no tempo.

Requer o conhecimento de alguns conceitos básicos:

- Variável aleatória (V.A.)
- Momentos da V.A. Exs:  $E[X]$ ,  $C[X, Y]$ ;
- Função densidade de probabilidade (FDP);
- Função de Distribuição Acumulada (FDA): univariada e bivariada;
- Função aleatória (FA), etc.



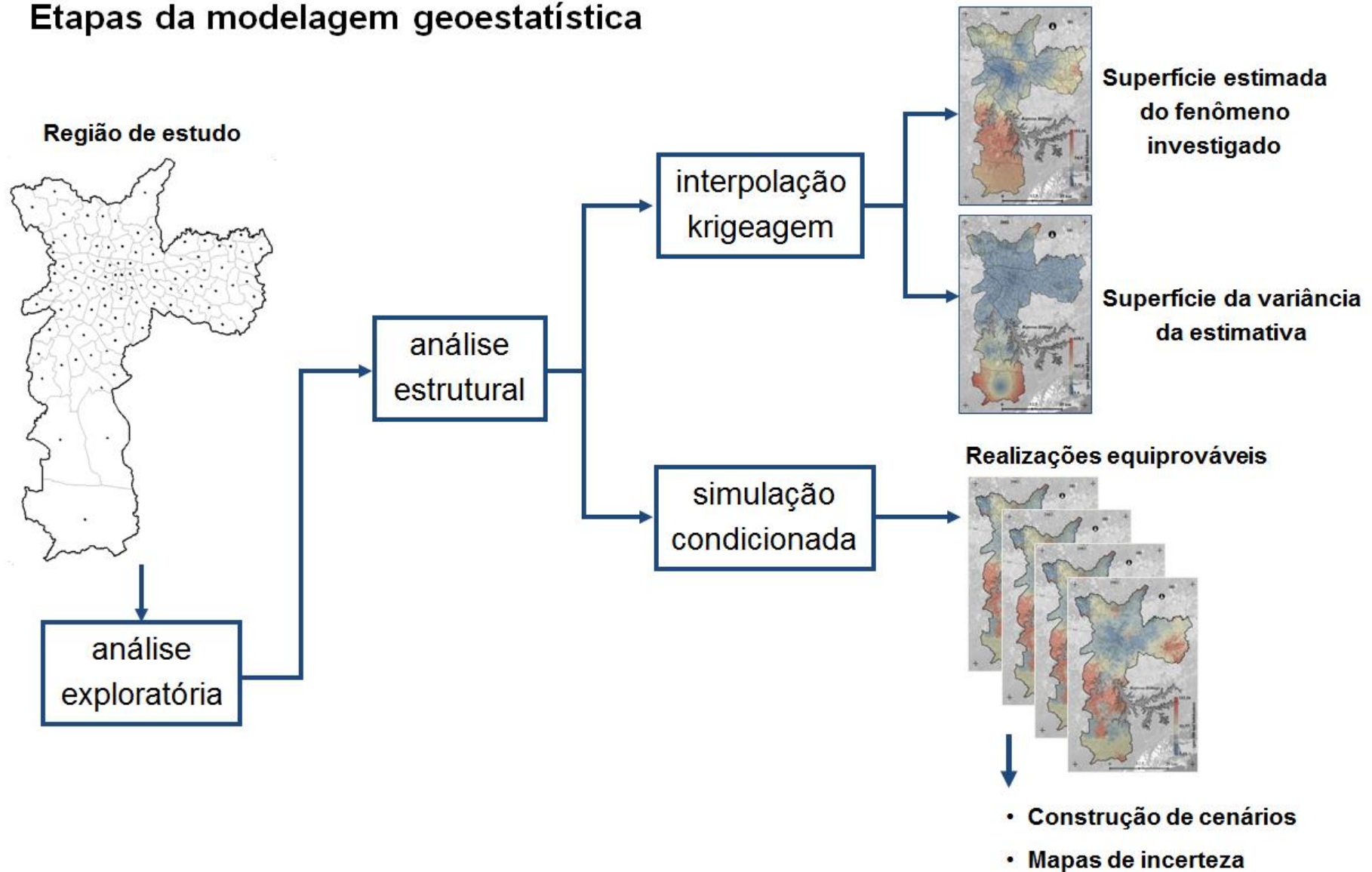
## A modelagem geoestatística envolve algumas etapas:

**Análise:** objetiva descrever a variabilidade espacial do fenômeno em estudo, denominada de análise estrutural ou modelagem do semivariograma.

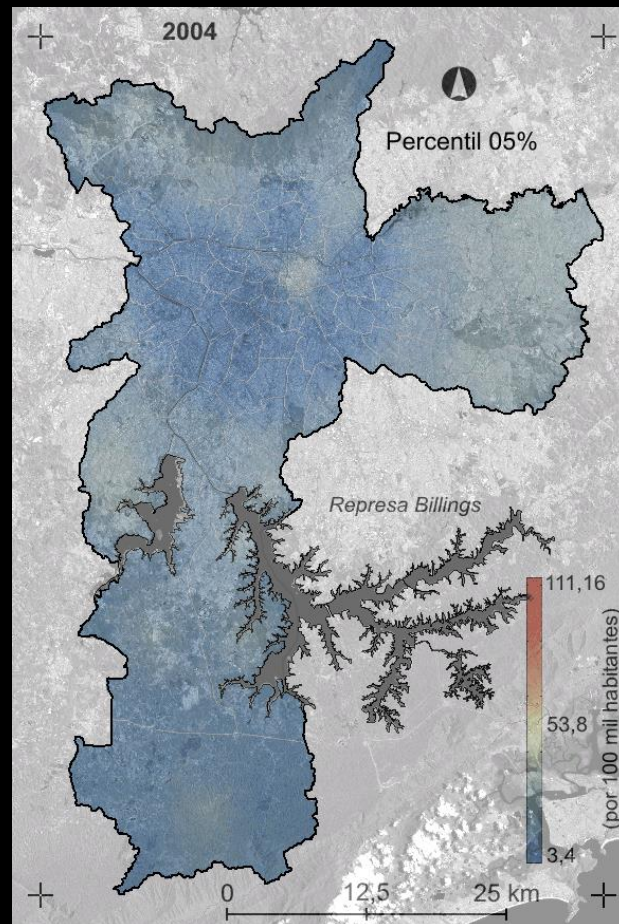
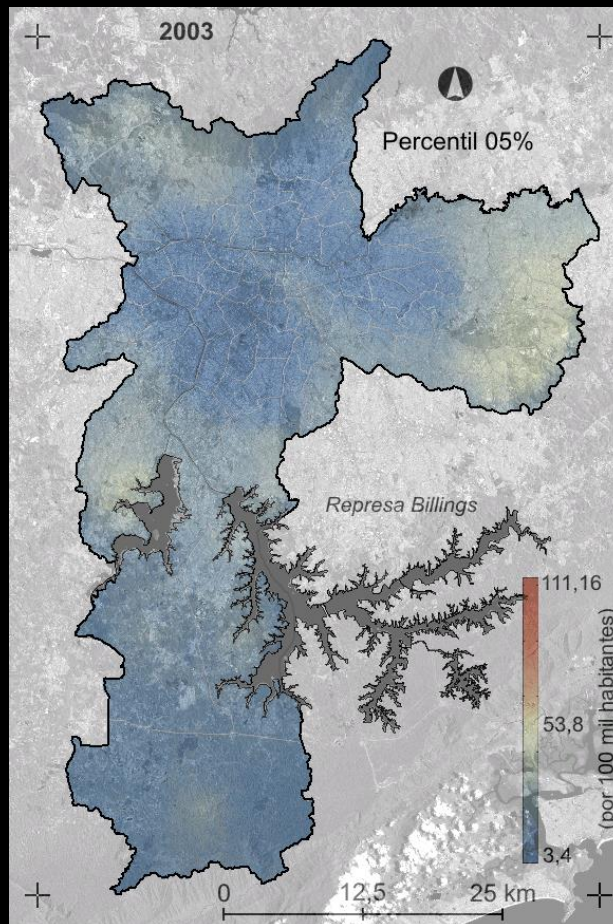
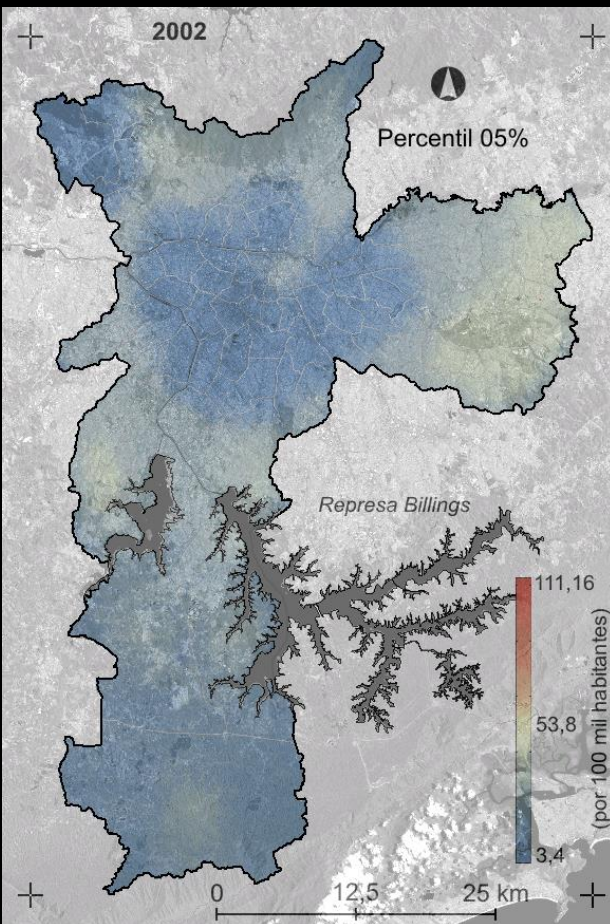
**Inferência:** objetiva estimar valores de uma variável distribuída no espaço em locais não amostrados, denominada de krigeagem.

**Simulação:** objetiva construir um conjunto de realizações equiprováveis ou igualmente representativa do fenômeno em estudo.

## Etapas da modelagem geoestatística



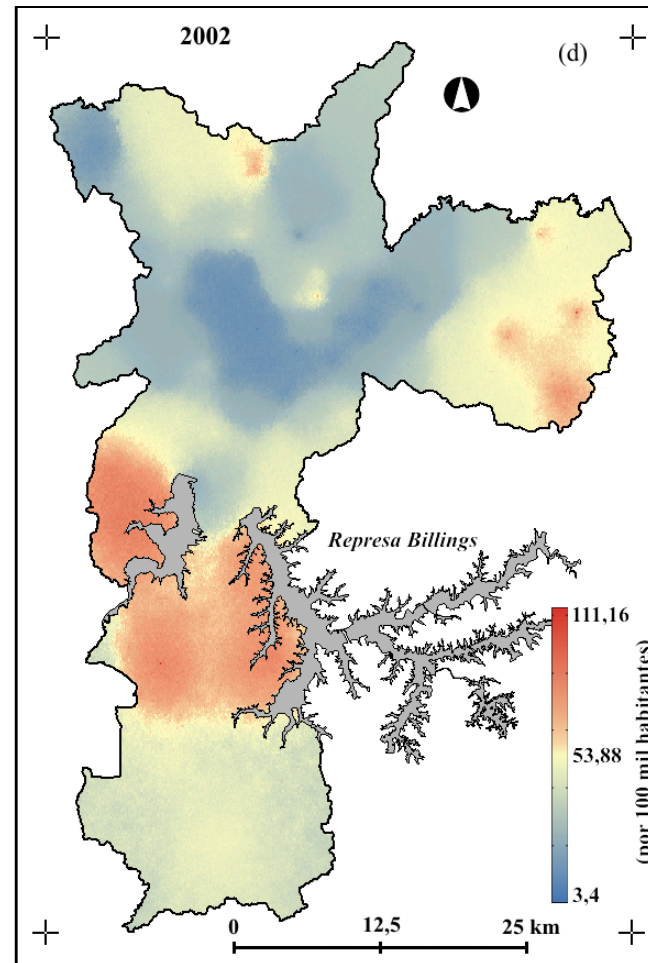
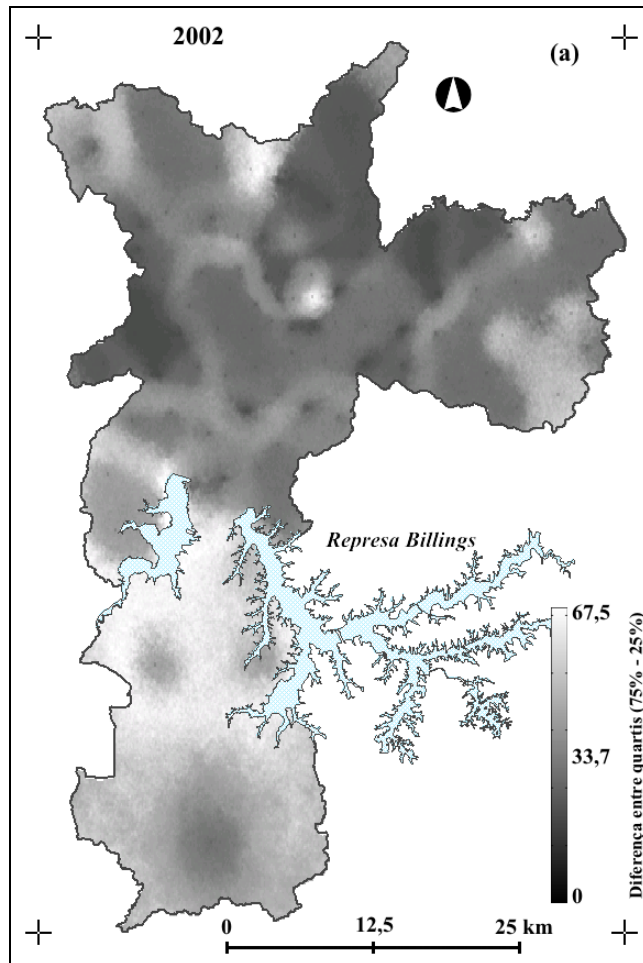
# Animação de cenários otimistas a pessimistas do risco de homicídio na cidade de São Paulo, no triênio 2002 - 2004



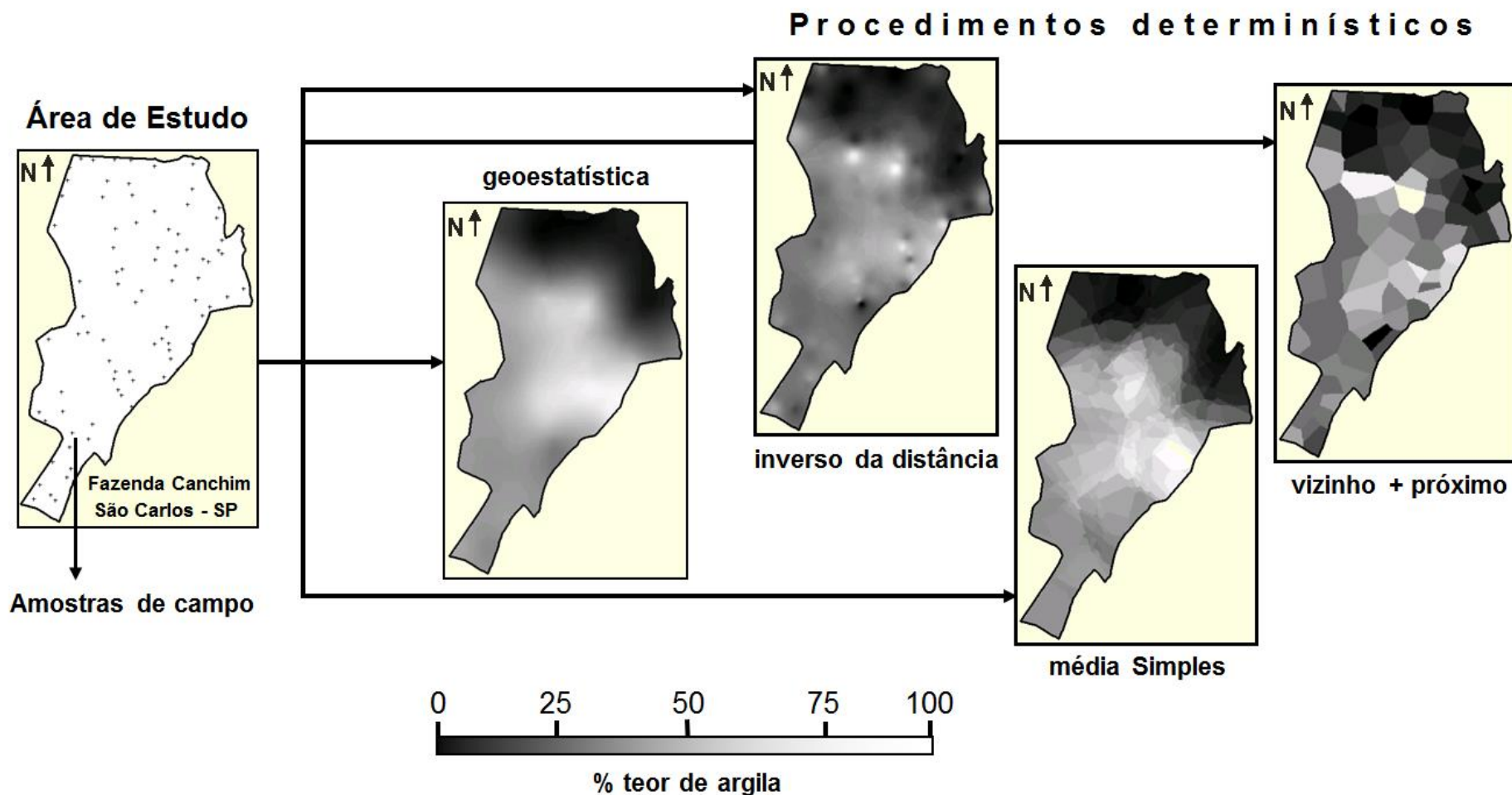


# ESTUDO DE CASO: CENÁRIOS DO RISCO DE HOMICÍDIO NA CIDADE DE SÃO PAULO, NO TRIÊNIO 2002 - 2004

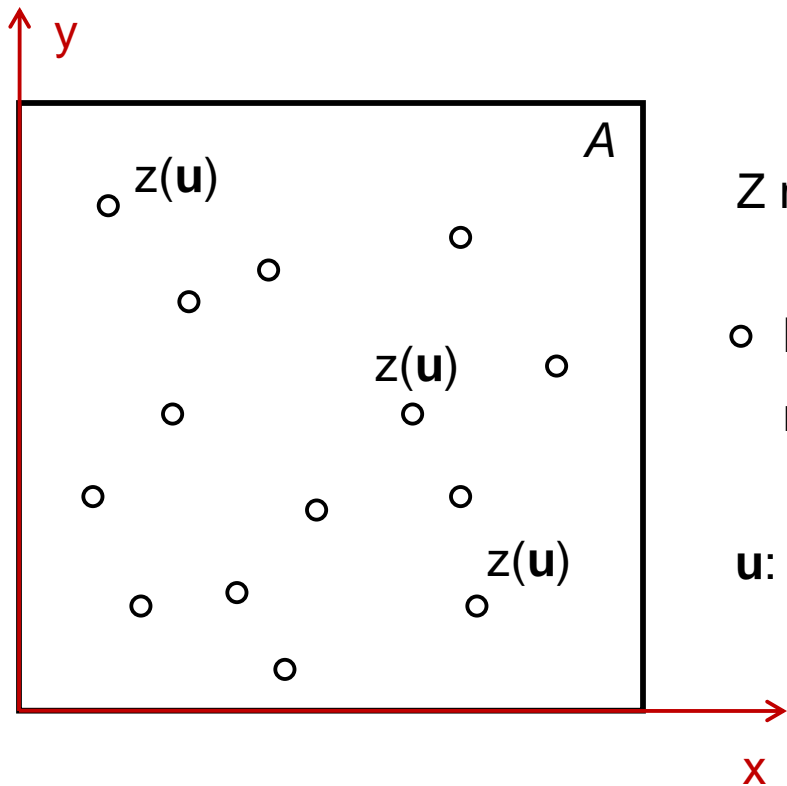
- Campos de incerteza construídos pela diferença entre quartis (3º quartil - 1º quartil) da Função de Distribuição Acumulada de  $R(\mathbf{u})$ .



## Porque usar geoestatística?



**Variável Aleatória (V.A.):** Uma visão prática no contexto da geoestatística.



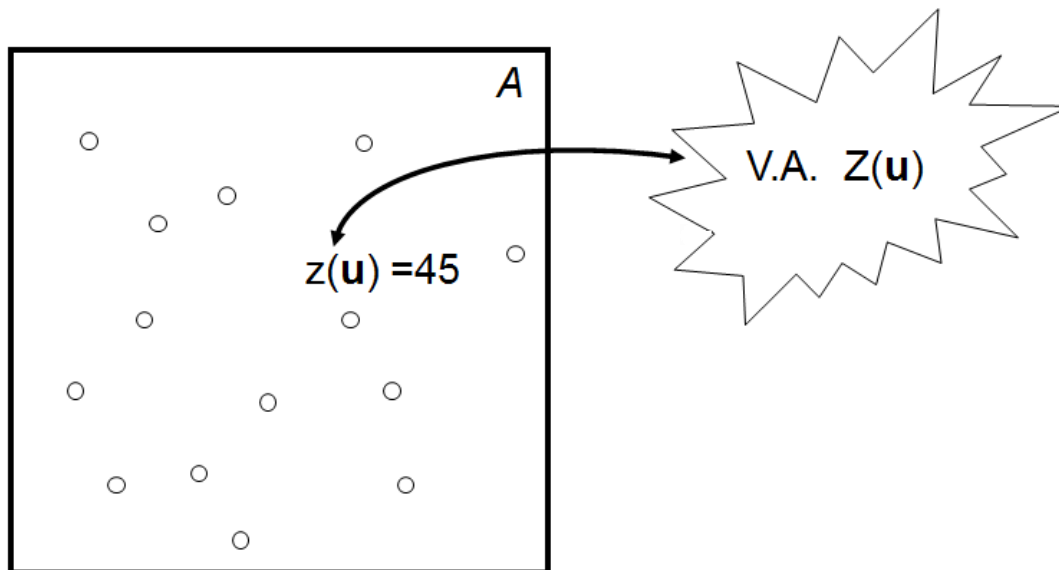
Z representa a variável em estudo.

○ localizações geográficas onde a variável Z é medida ou observada, denotado por  $z(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in A$ .

$\mathbf{u}$ : é um vetor de coordenadas geográficas [ $\mathbf{u}(x,y)$ ];

**Variável aleatória (V.A.):** Uma visão prática no contexto da geoestatística.

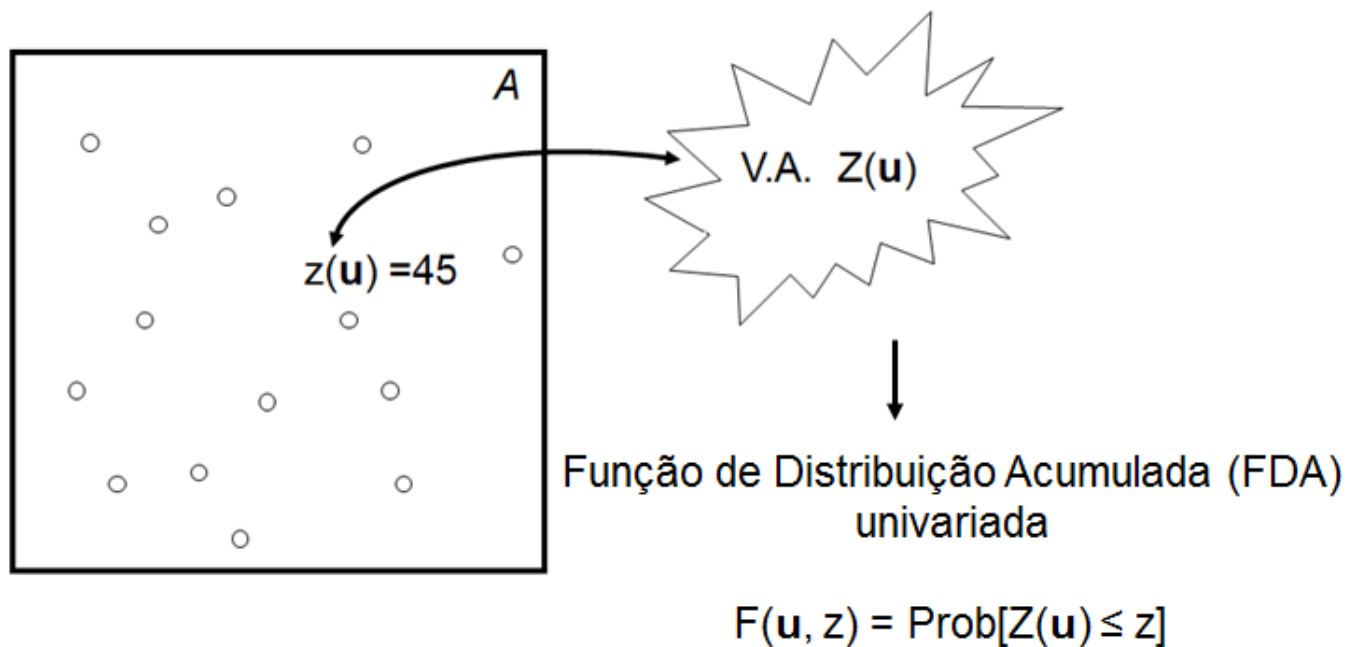
Localmente, um valor  $z(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in A$ , é interpretado como uma das possíveis realizações da variável aleatória  $Z(\mathbf{u})$ .





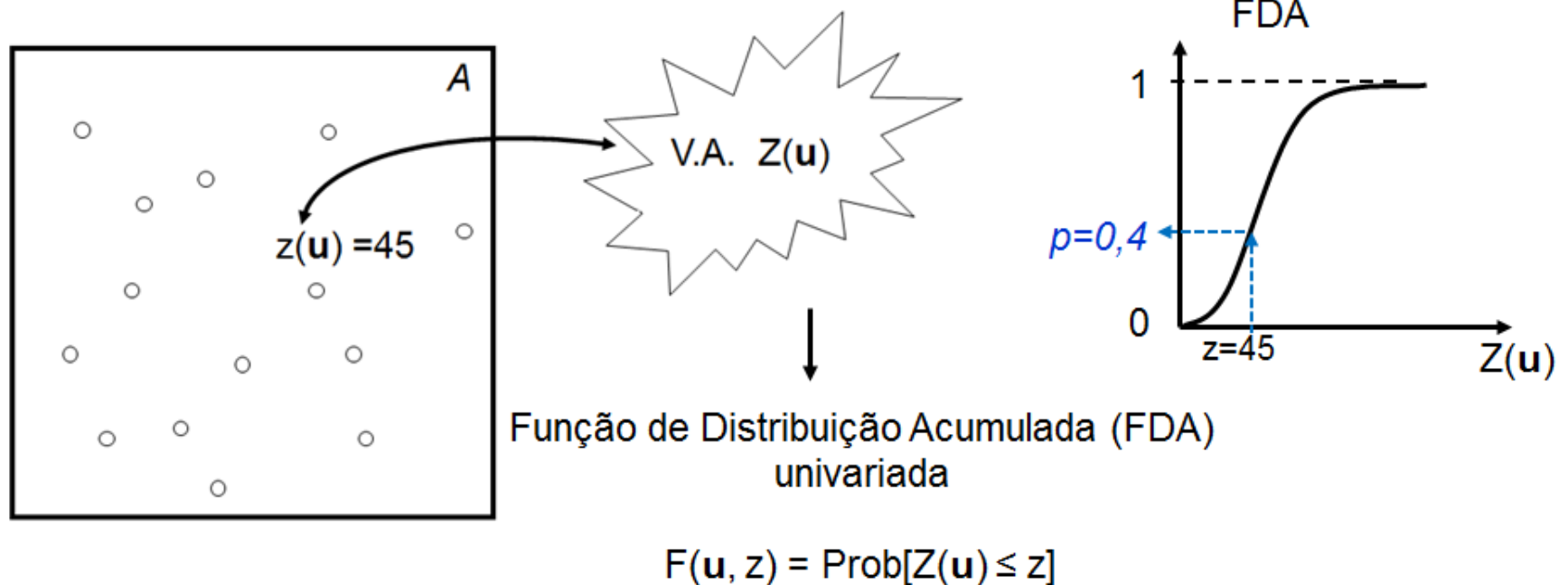
**Variável aleatória (V.A.):** Uma visão prática no contexto da geoestatística.

Localmente, um valor  $z(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in A$ , é interpretado como uma das possíveis realizações da variável aleatória  $Z(\mathbf{u})$ .



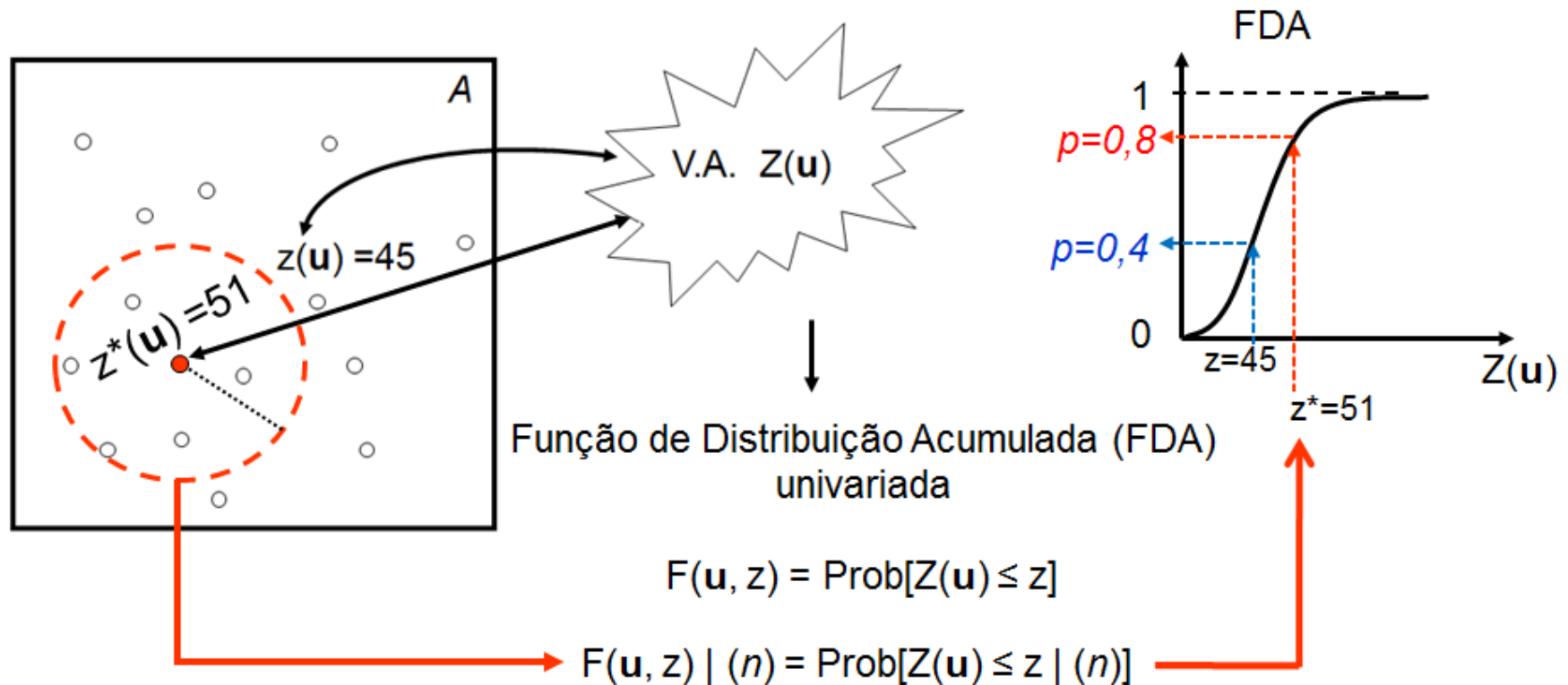
**Variável aleatória (V.A.):** Uma visão prática no contexto da geoestatística.

Localmente, um valor  $z(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in A$ , é interpretado como uma das possíveis realizações da variável aleatória  $Z(\mathbf{u})$ .



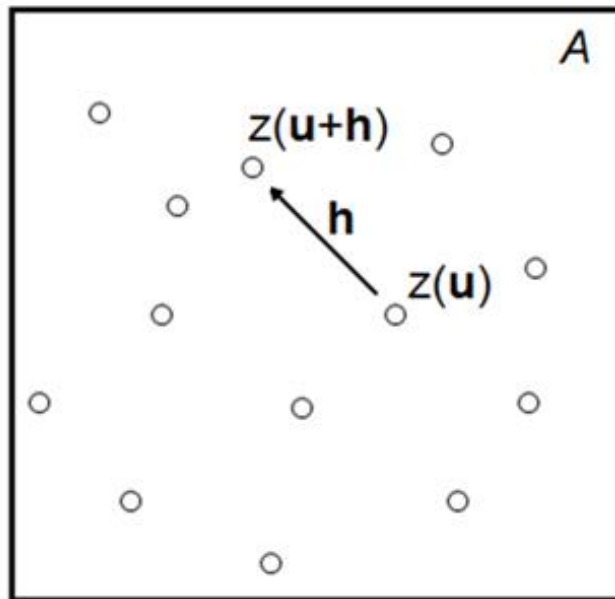
**Variável aleatória (V.A.):** Uma visão prática no contexto da geoestatística.

Localmente, um valor  $z(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in A$ , é interpretado como uma das possíveis realizações da variável aleatória  $Z(\mathbf{u})$ .



**Função aleatória (F.A.):** Uma visão prática no contexto da geoestatística.

O conjunto de V.A.,  $\{Z(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in A\}$ , é uma F.A.  $Z(\mathbf{u})$ .



$\mathbf{h}$  é um vetor distância entre dois pontos.

Na geoestatística um caso de particular interesse de F.A. é a FDA bivariada.

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{h}; z_1, z_2) = \text{Prob}[Z(\mathbf{u}) \leq z_1, Z(\mathbf{u}+\mathbf{h}) \leq z_2]$$



Momento da FDA bivariada: Covariância

$$C[Z(\mathbf{u}), Z(\mathbf{u}+\mathbf{h})] = E[Z(\mathbf{u}).Z(\mathbf{u}+\mathbf{h})] - E[Z(\mathbf{u})].E[Z(\mathbf{u}+\mathbf{h})]$$

**Função aleatória (F.A.):** Uma visão prática no contexto da geoestatística.

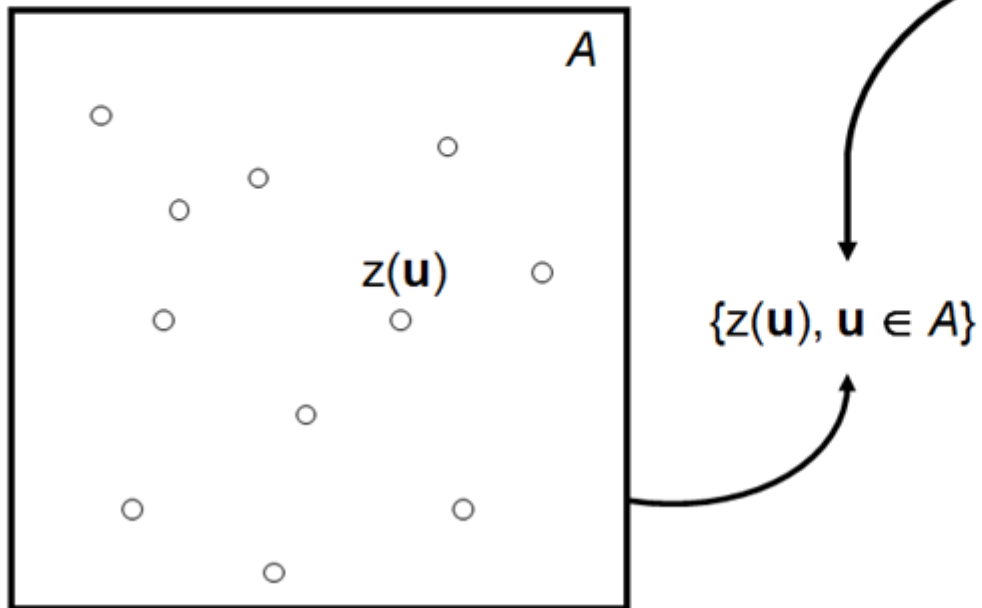
O que conhecemos de fato até agora?

**Função aleatória (F.A.):** Uma visão prática no contexto da geoestatística.

O que conhecemos de fato até agora?

Resposta: uma única amostragem do fenômeno de interesse.

Em outras palavras, tudo o que se sabe da F.A.  $Z(\mathbf{u})$  é uma única realização.

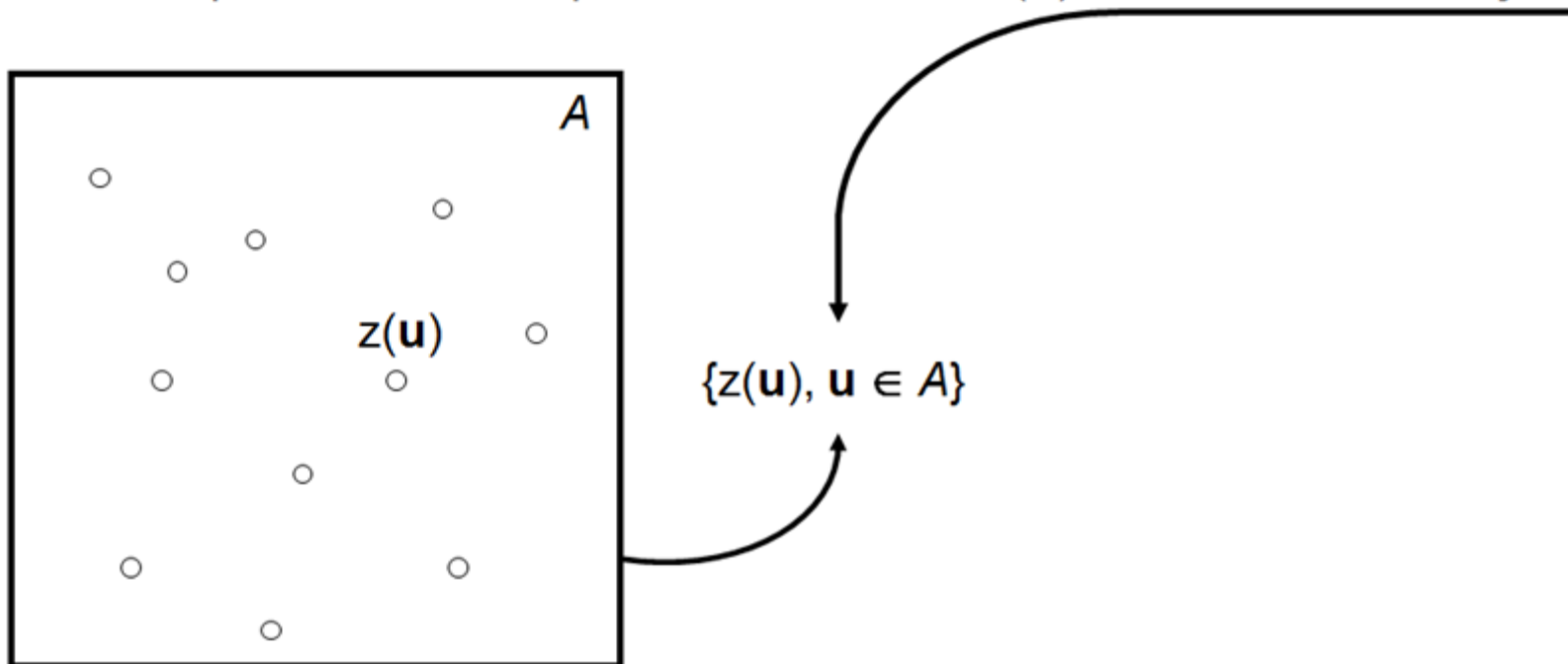


**Função aleatória (F.A.):** Uma visão prática no contexto da geoestatística.

O que conhecemos de fato até agora?

Resposta: uma única amostragem do fenômeno de interesse.

Em outras palavras, tudo o que se sabe da F.A.  $Z(\mathbf{u})$  é uma única realização.



**PROBLEMA:** como deduzir a lei de probabilidade da F.A.  $Z(\mathbf{u})$  a partir de uma única realização da mesma?



O paradigma que se estabelece, para inferir as FDA e interpolar valores em localizações não amostradas, é o de assumir a hipótese de ***estacionariedade***.

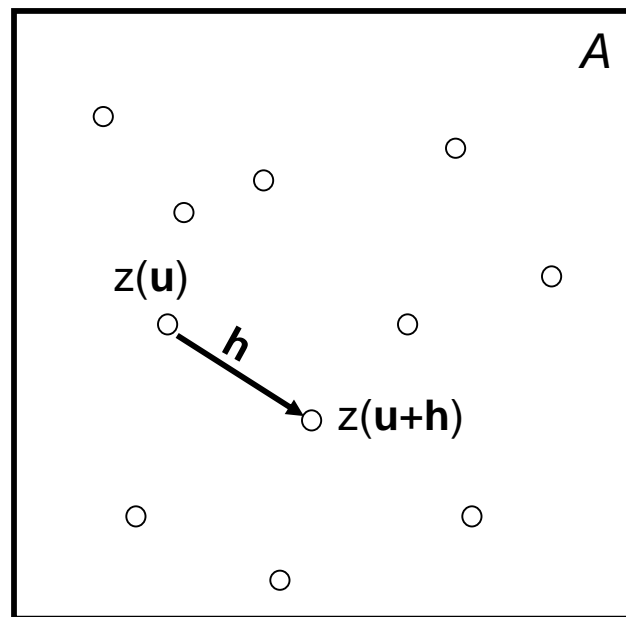
- *a **estacionariedade** é uma propriedade do modelo probabilístico, uma hipótese necessária para realização de inferências;*
- *não é uma característica do fenômeno espacial em estudo;*
- *é uma decisão feita pelo analista, afim de verificar a adequação do modelo à realidade a ser investigada.*

## Hipótese de estacionariedade de 2ª ordem

Considera somente o primeiro e o segundo momentos invariantes da F.A.

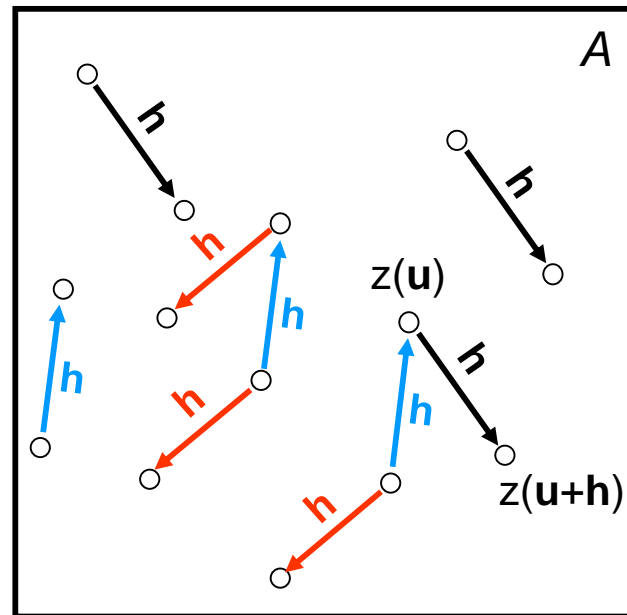
$$1) E[Z(\mathbf{u})] = m, \quad \forall \mathbf{u} \in A$$

$$E[Z(\mathbf{u})] = E[Z(\mathbf{u}+\mathbf{h})] = m \quad \text{ou} \quad E[Z(\mathbf{u})] - E[Z(\mathbf{u}+\mathbf{h})] = E[Z(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u}+\mathbf{h})] = 0$$



## Hipótese de estacionariedade de 2ª ordem

- 2) a covariância entre os pares  $Z(\mathbf{u})$  e  $Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})$ , separados por um vetor distância  $\mathbf{h}$ , é estacionária.



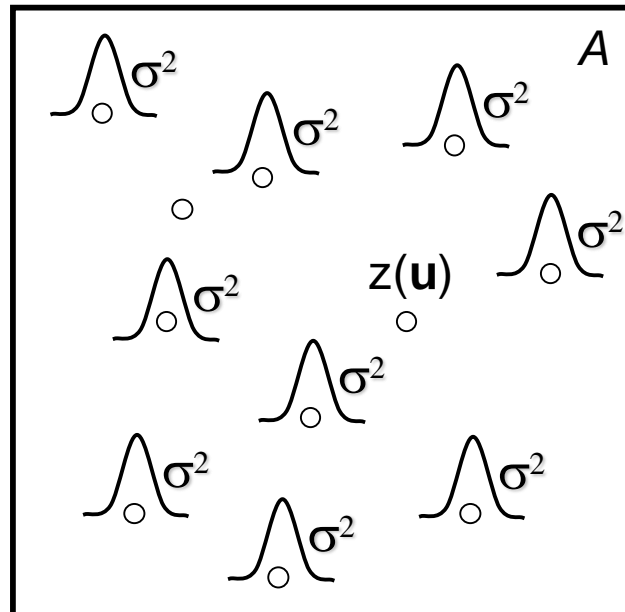
$$C[Z(\mathbf{u}), Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})] = E[(Z(\mathbf{u}).Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})) - E[Z(\mathbf{u})].E[Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})]] \quad \forall \mathbf{u} \in A$$

## Hipótese de estacionariedade de 2ª ordem

3) A estacionariedade da covariância implica na estacionariedade da variância:

$$\begin{aligned}\text{Var}[Z(\mathbf{u})] &= E[Z(\mathbf{u}) - m]^2 = E[Z^2(\mathbf{u})] - 2.E[Z(\mathbf{u})].m + m^2 = \\ &= E[Z(\mathbf{u}).Z(\mathbf{u} + \mathbf{0})] - 2m^2 + m^2 = \\ &= E[Z(\mathbf{u}).Z(\mathbf{u} + \mathbf{0})] - m^2 = C(\mathbf{0}), \quad \forall \mathbf{u} \in A\end{aligned}$$

Covariância



## Hipótese de estacionariedade intrínseca

estabelece que os incrementos  $[Z(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})]$  tem esperança zero e variância somente em função de  $\mathbf{h}$ , assim:

$$1) E[Z(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})] = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in A.$$

$$2) \text{Var}[Z(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})] = E\{[Z(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})]^2\} = 2\gamma(\mathbf{h})$$

em que:

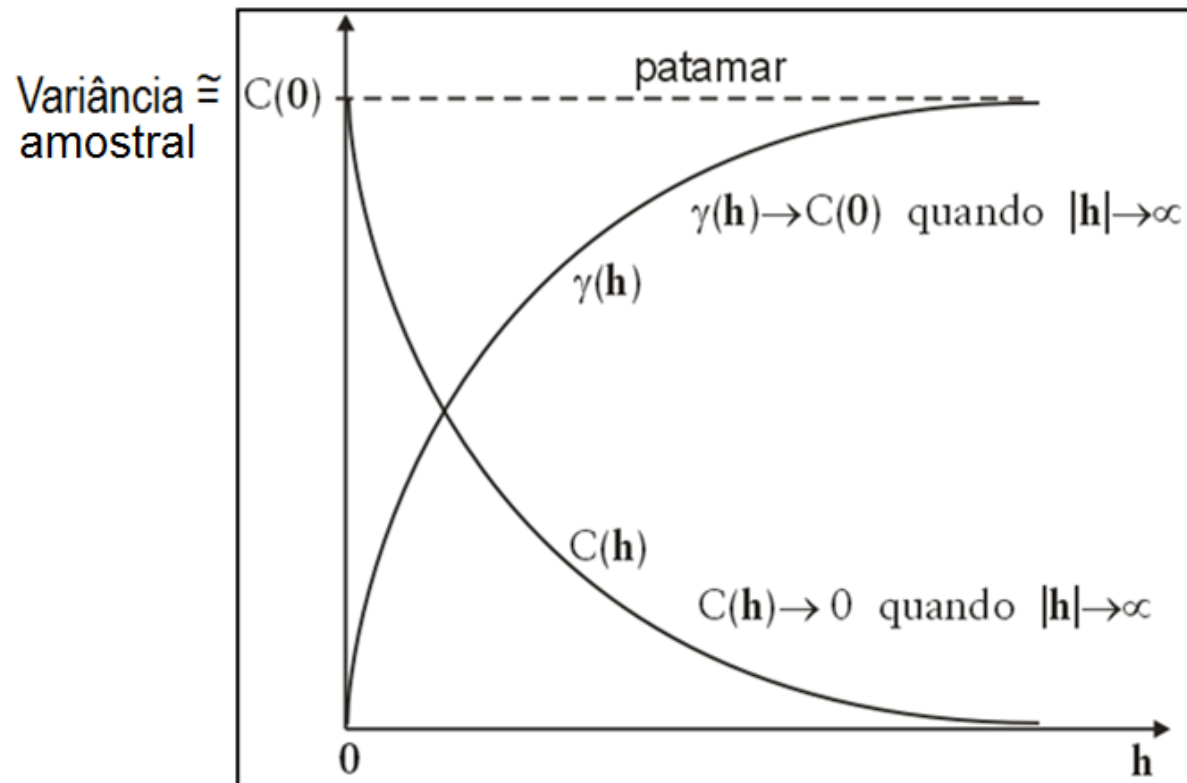
$2\gamma(\mathbf{h})$  é denominado de função variograma e  $\gamma(\mathbf{h})$  de semivariograma

$$\gamma(\mathbf{h}) = C(\mathbf{0}) - C(\mathbf{h})$$

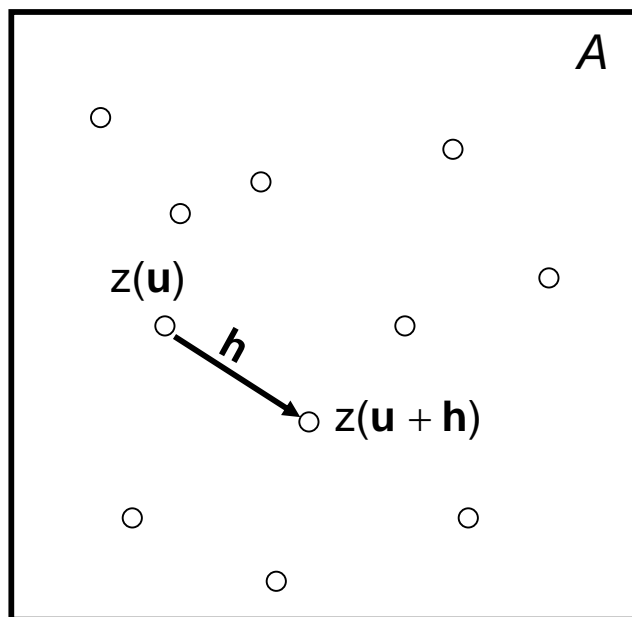
a covariância  $C(\mathbf{h})$  e o semivariograma  $\gamma(\mathbf{h})$  são ferramentas equivalentes para caracterizar a dependência espacial.

Relação entre as funções semivariograma ( $\gamma(\mathbf{h})$ ) e covariância ( $C(\mathbf{h})$ )

$$\gamma(\mathbf{h}) = C(0) - C(\mathbf{h})$$

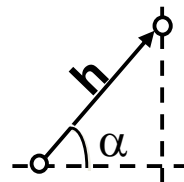


O variograma é uma ferramenta básica de suporte às técnicas de geoestatística, que permite representar quantitativamente a variação de um fenômeno regionalizado no espaço (Huijbregts, 1975).



- $2\gamma(\mathbf{h})$  mede o grau de dissimilaridade entre pares de observação separados pelo vetor distância  $\mathbf{h}$ ;
- é função do vetor distância  $\mathbf{h}$ ;
- depende da geometria de amostragem.

vetor distância  $\mathbf{h}$





**Definição:** esperança matemática ( $E$ ) do quadrado da diferença entre os valores de pontos no espaço separados pelo vetor distância  $\mathbf{h}$ .

$$2\gamma(\mathbf{h}) = E\{[z(\mathbf{u}) - z(\mathbf{u} + \mathbf{h})]^2\}$$

Através de um conjunto amostral,  $\{z(\mathbf{u}_1), z(\mathbf{u}_2), \dots, z(\mathbf{u}_N)\}$ , o variograma pode ser estimado por:

$$2\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

em que:

$2\hat{\gamma}(\mathbf{h})$ : é o estimador de variograma;

$\mathbf{h}$ : é o vetor distância (modulo e direção) entre pares de observação;

$N(\mathbf{h})$ : é o número de pares,  $z(\mathbf{u}_i)$  e  $z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})$ , separados por  $\mathbf{h}$ ;

$z(\mathbf{u}_i)$  e  $z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})$ : são valores observados nas localizações  $\mathbf{u}_i$  e  $\mathbf{u}_i + \mathbf{h}$ .

**Definição:** metade da esperança matemática ( $E$ ) do quadrado da diferença entre os valores de pontos no espaço separados pelo vetor distância  $\mathbf{h}$ .

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} E\{[z(\mathbf{u}) - z(\mathbf{u} + \mathbf{h})]^2\}$$

Através de um conjunto amostral,  $\{z(\mathbf{u}_1), z(\mathbf{u}_2), \dots, z(\mathbf{u}_N)\}$ , o semivariograma pode ser estimado por:

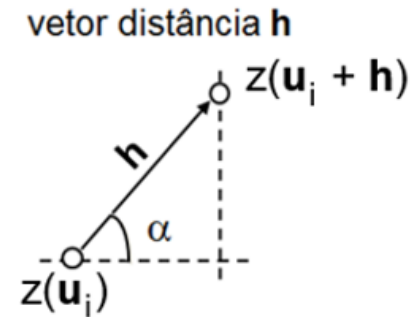
$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

em que:

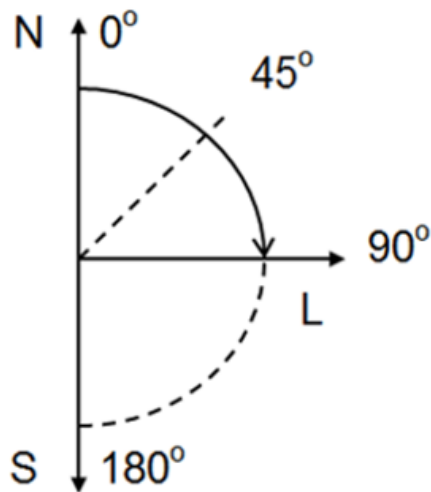
$\hat{\gamma}(\mathbf{h})$ : é o estimador de semivariograma;

$\mathbf{h}$ ,  $N(\mathbf{h})$ ,  $z(\mathbf{u}_i)$  e  $z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})$ : conforme definidos anteriormente.

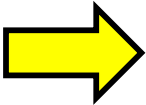
$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$



Direções de análise na geoestatística

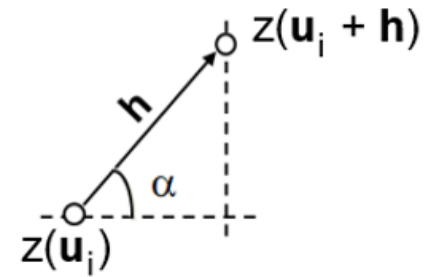


função simétrica

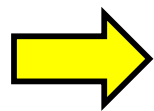
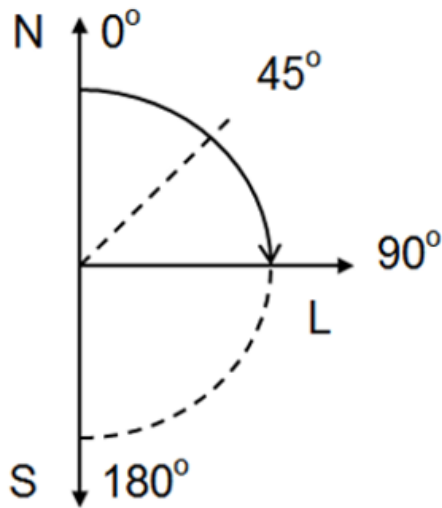

$$\gamma(\mathbf{h}) = -\gamma(\mathbf{h})$$

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

vetor distância  $\mathbf{h}$



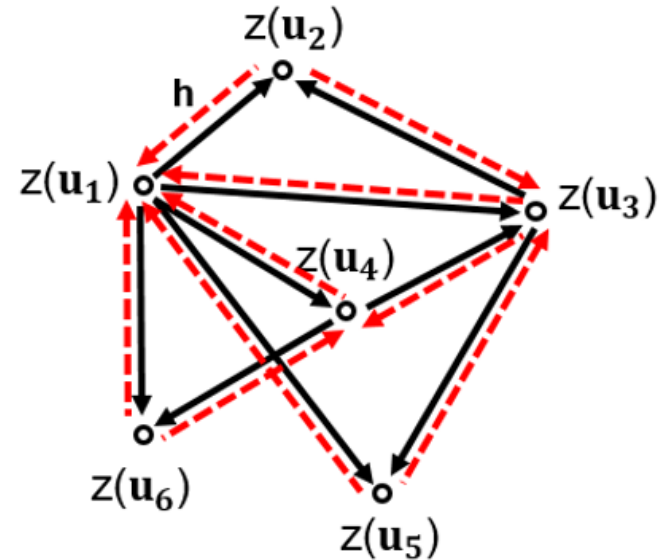
Direções de análise na geoestatística



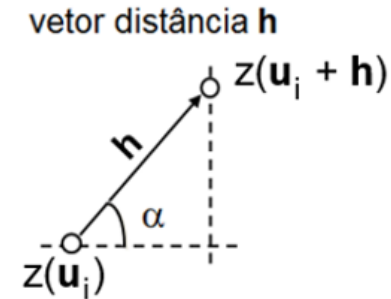
função simétrica

$$\gamma(\mathbf{h}) = -\gamma(\mathbf{h})$$

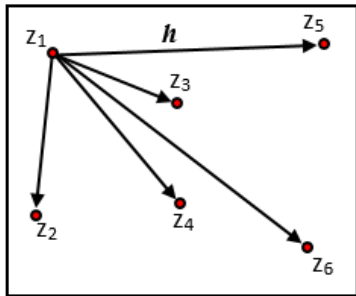
exemplos



$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$



Ex: para uma amostragem contendo 6 observações ( $n=6$ ): qual a quantidade de pares ( $p = 2$ ) de observações que se podem formar?



$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!}$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6 - 2)!} = 15$$

$$C_{100}^2 = \frac{100!}{2! \cdot (100 - 2)!} = 4950 \text{ pares de observações}$$

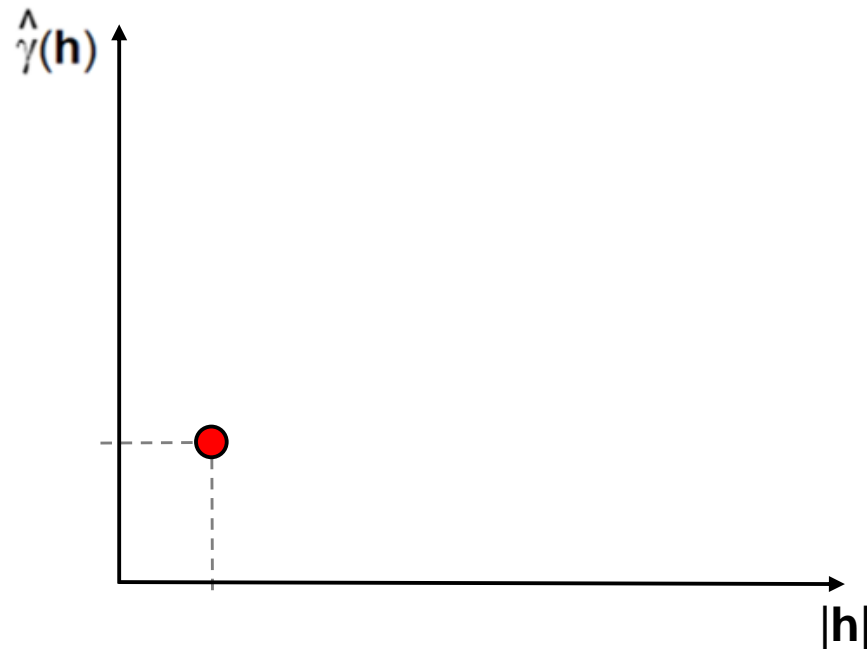
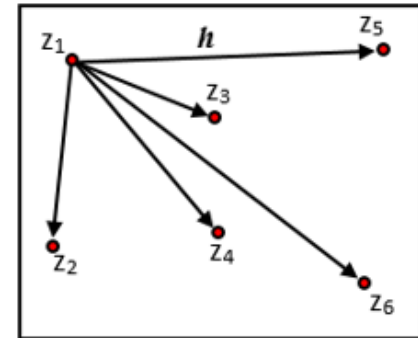
$$C_{200}^2 = \frac{200!}{2! \cdot (200 - 2)!} = 19900 \text{ pares de observações}$$

	Par de observação	Distância $ \mathbf{h} $	Direção ( $\alpha$ )
1	$z_1$   $z_2$	$h_{1,2}$	$\alpha_{1,2}$
2	$z_1$   $z_3$	$h_{1,3}$	$\alpha_{1,3}$
3	$z_1$   $z_4$	$h_{1,4}$	$\alpha_{1,4}$
4	$z_1$   $z_5$	$h_{1,5}$	$\alpha_{1,5}$
5	$z_1$   $z_6$	$h_{1,6}$	$\alpha_{1,6}$
6	$z_2$   $z_3$	$h_{2,3}$	$\alpha_{2,3}$
7	$z_2$   $z_4$	$h_{2,4}$	$\alpha_{2,4}$
8	$z_2$   $z_5$	$h_{2,5}$	$\alpha_{2,5}$
9	$z_2$   $z_6$	$h_{2,6}$	$\alpha_{2,6}$
10	$z_3$   $z_4$	$h_{3,4}$	$\alpha_{2,6}$
11	$z_3$   $z_5$	$h_{3,5}$	$\alpha_{2,6}$
12	$z_3$   $z_6$	$h_{3,6}$	$\alpha_{2,6}$
13	$z_4$   $z_5$	$h_{4,5}$	$\alpha_{2,6}$
14	$z_4$   $z_6$	$h_{4,6}$	$\alpha_{2,6}$
15	$z_5$   $z_6$	$h_{5,6}$	$\alpha_{5,6}$

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

análise:

- omnidirecional (considera somente  $|\mathbf{h}|$ )
- direcional (considera  $|\mathbf{h}|$  + direção  $\alpha$ )

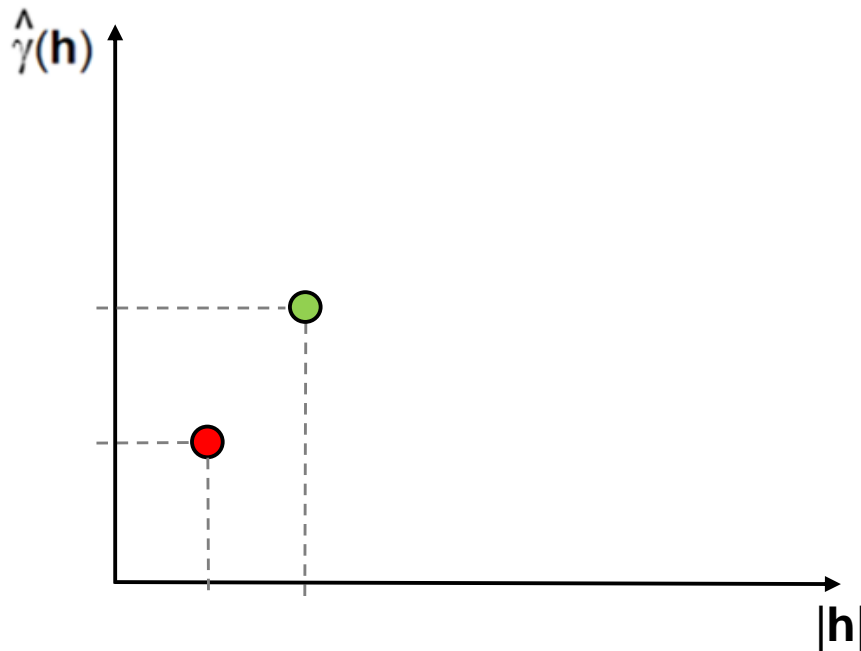
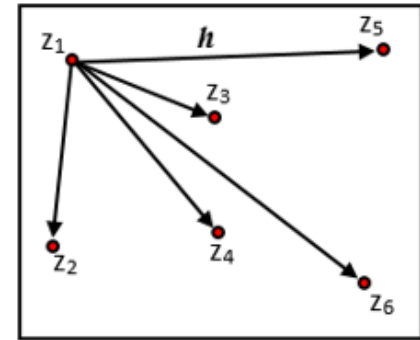


Par de observação		Distância $ \mathbf{h} $	Direção ( $\alpha$ )
$z_1$	$z_2$	$h_{1,2}$	$\alpha_{1,2}$
$z_1$	$z_3$	$h_{1,3}$	$\alpha_{1,3}$
$z_1$	$z_4$	$h_{1,4}$	$\alpha_{1,4}$
$z_1$	$z_5$	$h_{1,5}$	$\alpha_{1,5}$
$z_1$	$z_6$	$h_{1,6}$	$\alpha_{1,6}$
$z_2$	$z_3$	$h_{2,3}$	$\alpha_{2,3}$
$z_2$	$z_4$	$h_{2,4}$	$\alpha_{2,4}$
$z_2$	$z_5$	$h_{2,5}$	$\alpha_{2,5}$
$z_2$	$z_6$	$h_{2,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_4$	$h_{3,4}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_5$	$h_{3,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_6$	$h_{3,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_5$	$h_{4,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_6$	$h_{4,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_5$	$z_6$	$h_{5,6}$	$\alpha_{5,6}$

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

análise:

- omnidirecional (considera somente  $|\mathbf{h}|$ )
- direcional (considera  $|\mathbf{h}|$  + direção  $\alpha$ )

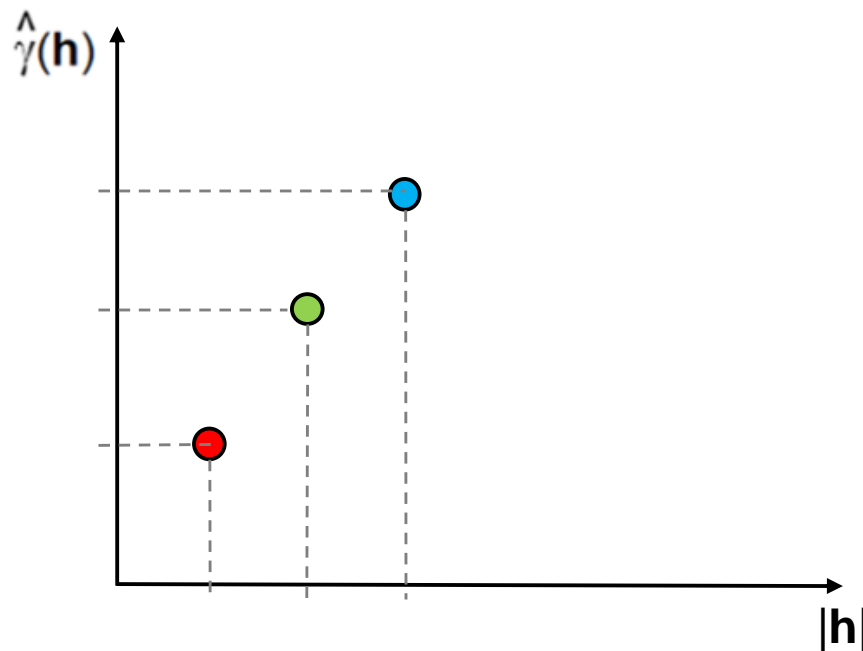
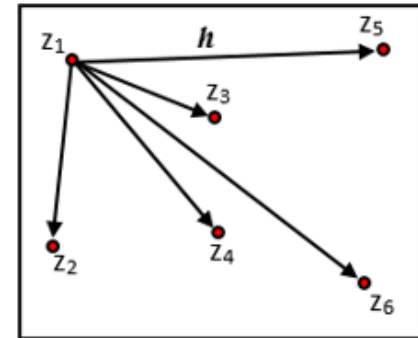


Par de observação		Distância $ \mathbf{h} $	Direção ( $\alpha$ )
$z_1$	$z_2$	$h_{1,2}$	$\alpha_{1,2}$
$z_1$	$z_3$	$h_{1,3}$	$\alpha_{1,3}$
$z_1$	$z_4$	$h_{1,4}$	$\alpha_{1,4}$
$z_1$	$z_5$	$h_{1,5}$	$\alpha_{1,5}$
$z_1$	$z_6$	$h_{1,6}$	$\alpha_{1,6}$
$z_2$	$z_3$	$h_{2,3}$	$\alpha_{2,3}$
$z_2$	$z_4$	$h_{2,4}$	$\alpha_{2,4}$
$z_2$	$z_5$	$h_{2,5}$	$\alpha_{2,5}$
$z_2$	$z_6$	$h_{2,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_4$	$h_{3,4}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_5$	$h_{3,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_6$	$h_{3,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_5$	$h_{4,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_6$	$h_{4,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_5$	$z_6$	$h_{5,6}$	$\alpha_{5,6}$

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

análise:

- omnidirecional (considera somente  $|\mathbf{h}|$ )
- direcional (considera  $|\mathbf{h}|$  + direção  $\alpha$ )



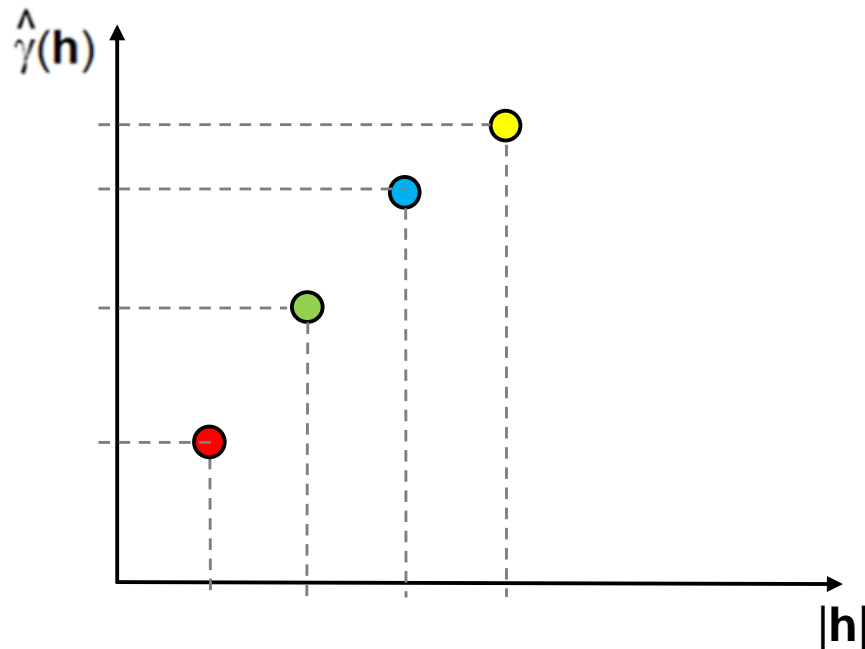
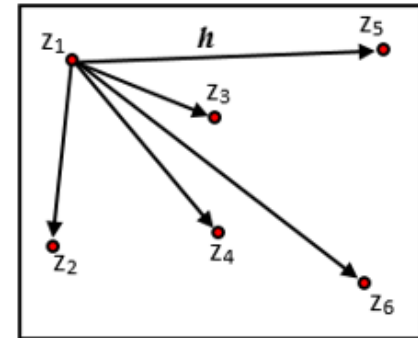
Par de observação		Distância $ \mathbf{h} $	Direção ( $\alpha$ )
$z_1$	$z_2$	$h_{1,2}$	$\alpha_{1,2}$
$z_1$	$z_3$	$h_{1,3}$	$\alpha_{1,3}$
$z_1$	$z_4$	$h_{1,4}$	$\alpha_{1,4}$
$z_1$	$z_5$	$h_{1,5}$	$\alpha_{1,5}$
$z_1$	$z_6$	$h_{1,6}$	$\alpha_{1,6}$
$z_2$	$z_3$	$h_{2,3}$	$\alpha_{2,3}$
$z_2$	$z_4$	$h_{2,4}$	$\alpha_{2,4}$
$z_2$	$z_5$	$h_{2,5}$	$\alpha_{2,5}$
$z_2$	$z_6$	$h_{2,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_4$	$h_{3,4}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_5$	$h_{3,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_6$	$h_{3,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_5$	$h_{4,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_6$	$h_{4,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_5$	$z_6$	$h_{5,6}$	$\alpha_{5,6}$



$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

análise:

- omnidirecional (considera somente  $|\mathbf{h}|$ )
- direcional (considera  $|\mathbf{h}|$  + direção  $\alpha$ )

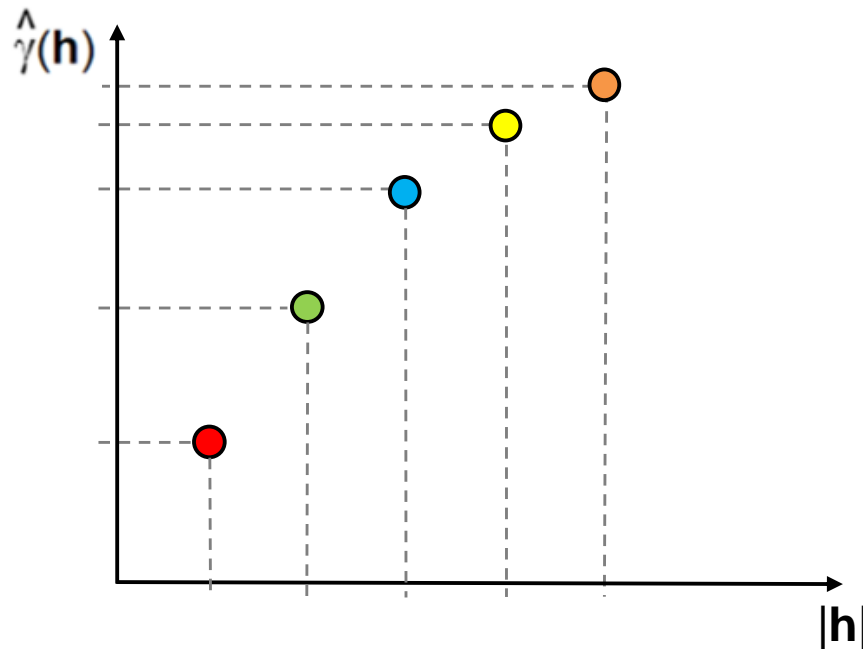
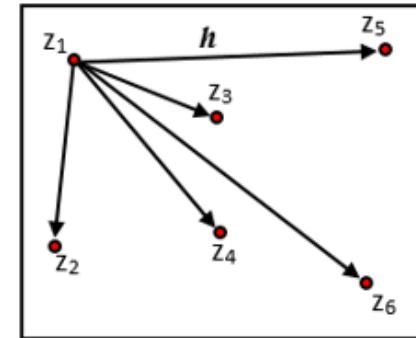


Par de observação		Distância $ \mathbf{h} $	Direção ( $\alpha$ )
$z_1$	$z_2$	$h_{1,2}$	$\alpha_{1,2}$
$z_1$	$z_3$	$h_{1,3}$	$\alpha_{1,3}$
$z_1$	$z_4$	$h_{1,4}$	$\alpha_{1,4}$
$z_1$	$z_5$	$h_{1,5}$	$\alpha_{1,5}$
$z_1$	$z_6$	$h_{1,6}$	$\alpha_{1,6}$
$z_2$	$z_3$	$h_{2,3}$	$\alpha_{2,3}$
$z_2$	$z_4$	$h_{2,4}$	$\alpha_{2,4}$
$z_2$	$z_5$	$h_{2,5}$	$\alpha_{2,5}$
$z_2$	$z_6$	$h_{2,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_4$	$h_{3,4}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_5$	$h_{3,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_6$	$h_{3,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_5$	$h_{4,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_6$	$h_{4,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_5$	$z_6$	$h_{5,6}$	$\alpha_{5,6}$

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

análise:

- omnidirecional (considera somente  $|\mathbf{h}|$ )
- direcional (considera  $|\mathbf{h}|$  + direção  $\alpha$ )

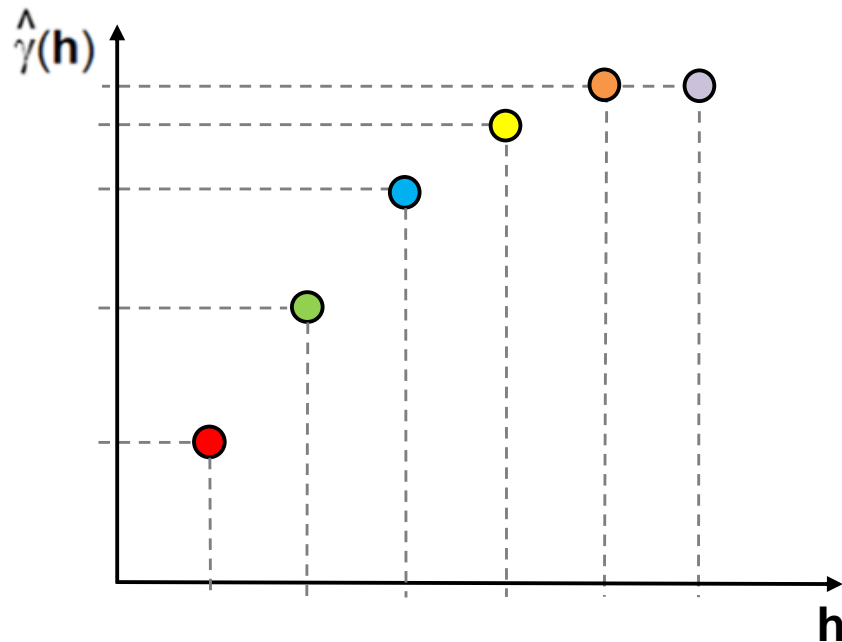
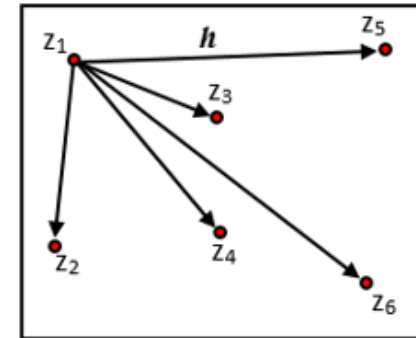


Par de observação		Distância $ \mathbf{h} $	Direção ( $\alpha$ )
$z_1$	$z_2$	$h_{1,2}$	$\alpha_{1,2}$
$z_1$	$z_3$	$h_{1,3}$	$\alpha_{1,3}$
$z_1$	$z_4$	$h_{1,4}$	$\alpha_{1,4}$
$z_1$	$z_5$	$h_{1,5}$	$\alpha_{1,5}$
$z_1$	$z_6$	$h_{1,6}$	$\alpha_{1,6}$
$z_2$	$z_3$	$h_{2,3}$	$\alpha_{2,3}$
$z_2$	$z_4$	$h_{2,4}$	$\alpha_{2,4}$
$z_2$	$z_5$	$h_{2,5}$	$\alpha_{2,5}$
$z_2$	$z_6$	$h_{2,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_4$	$h_{3,4}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_5$	$h_{3,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_6$	$h_{3,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_5$	$h_{4,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_6$	$h_{4,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_5$	$z_6$	$h_{5,6}$	$\alpha_{5,6}$

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

análise:

- omnidirecional (considera somente  $|\mathbf{h}|$ )
- direcional (considera  $|\mathbf{h}|$  + direção  $\alpha$ )

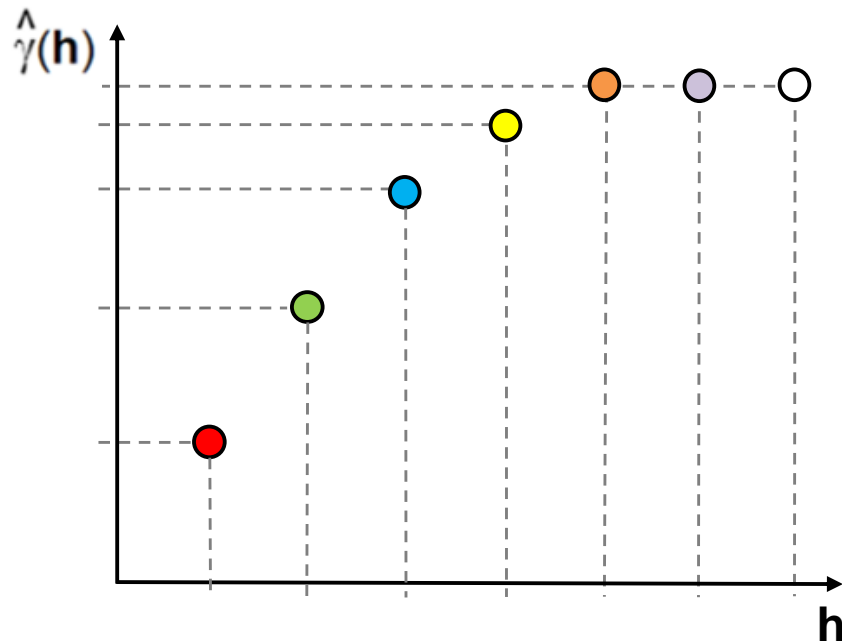
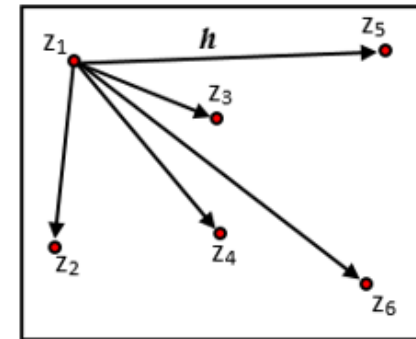


Par de observação		Distância $ \mathbf{h} $	Direção ( $\alpha$ )
$z_1$	$z_2$	$h_{1,2}$	$\alpha_{1,2}$
$z_1$	$z_3$	$h_{1,3}$	$\alpha_{1,3}$
$z_1$	$z_4$	$h_{1,4}$	$\alpha_{1,4}$
$z_1$	$z_5$	$h_{1,5}$	$\alpha_{1,5}$
$z_1$	$z_6$	$h_{1,6}$	$\alpha_{1,6}$
$z_2$	$z_3$	$h_{2,3}$	$\alpha_{2,3}$
$z_2$	$z_4$	$h_{2,4}$	$\alpha_{2,4}$
$z_2$	$z_5$	$h_{2,5}$	$\alpha_{2,5}$
$z_2$	$z_6$	$h_{2,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_4$	$h_{3,4}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_5$	$h_{3,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_6$	$h_{3,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_5$	$h_{4,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_6$	$h_{4,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_5$	$z_6$	$h_{5,6}$	$\alpha_{5,6}$

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

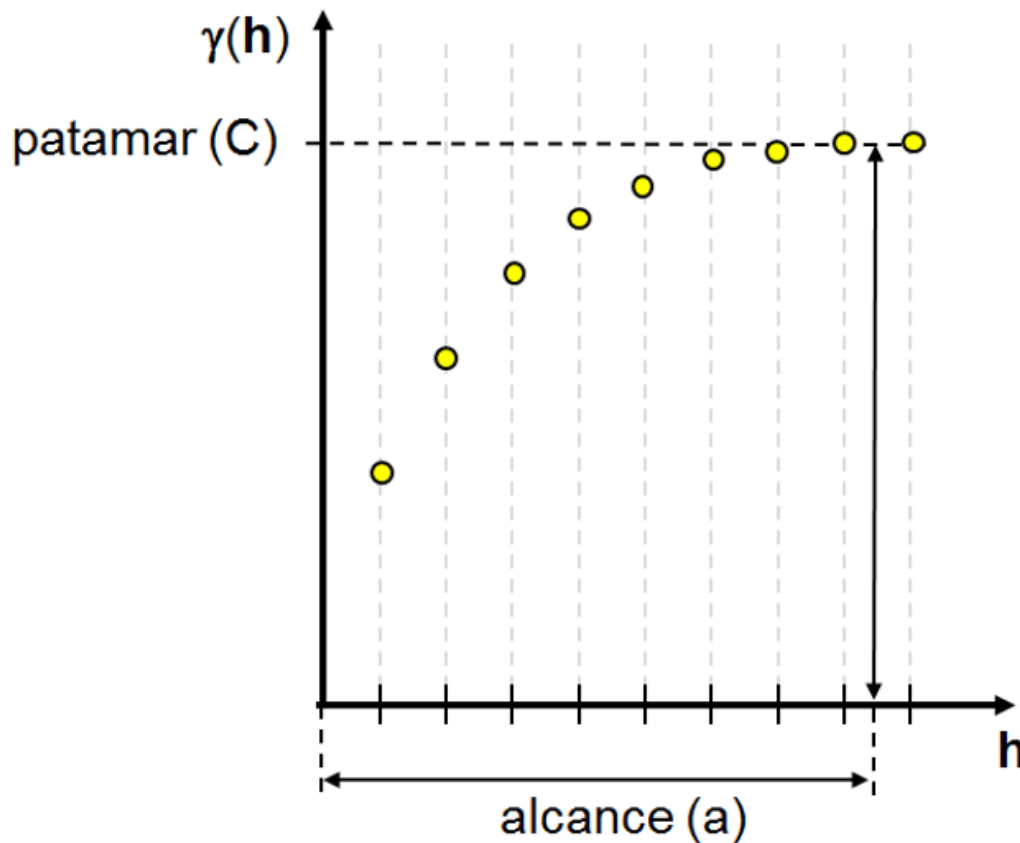
análise:

- omnidirecional (considera somente  $|\mathbf{h}|$ )
- direcional (considera  $|\mathbf{h}|$  + direção  $\alpha$ )

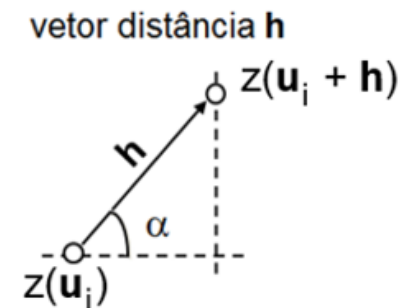


Par de observação		Distância $ \mathbf{h} $	Direção ( $\alpha$ )
$z_1$	$z_2$	$h_{1,2}$	$\alpha_{1,2}$
$z_1$	$z_3$	$h_{1,3}$	$\alpha_{1,3}$
$z_1$	$z_4$	$h_{1,4}$	$\alpha_{1,4}$
$z_1$	$z_5$	$h_{1,5}$	$\alpha_{1,5}$
$z_1$	$z_6$	$h_{1,6}$	$\alpha_{1,6}$
$z_2$	$z_3$	$h_{2,3}$	$\alpha_{2,3}$
$z_2$	$z_4$	$h_{2,4}$	$\alpha_{2,4}$
$z_2$	$z_5$	$h_{2,5}$	$\alpha_{2,5}$
$z_2$	$z_6$	$h_{2,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_4$	$h_{3,4}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_5$	$h_{3,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_3$	$z_6$	$h_{3,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_5$	$h_{4,5}$	$\alpha_{2,6}$
$z_4$	$z_6$	$h_{4,6}$	$\alpha_{2,6}$
$z_5$	$z_6$	$h_{5,6}$	$\alpha_{5,6}$

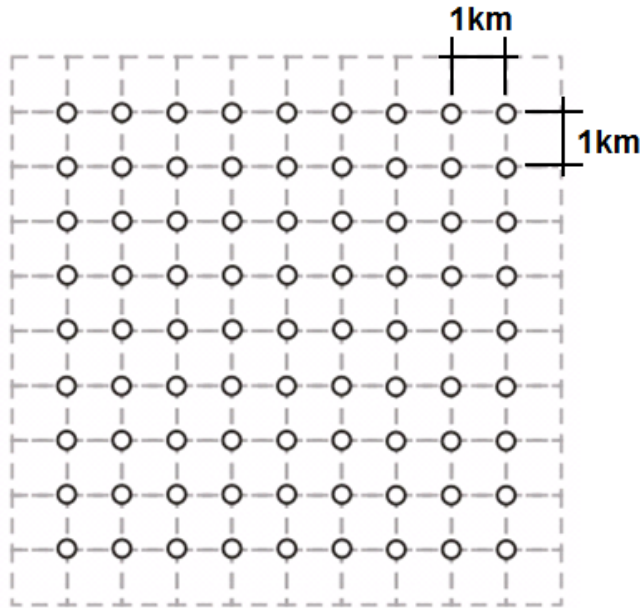
A figura ilustra um semivariograma empírico (ou experimental) com características muito próximas do ideal.



$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

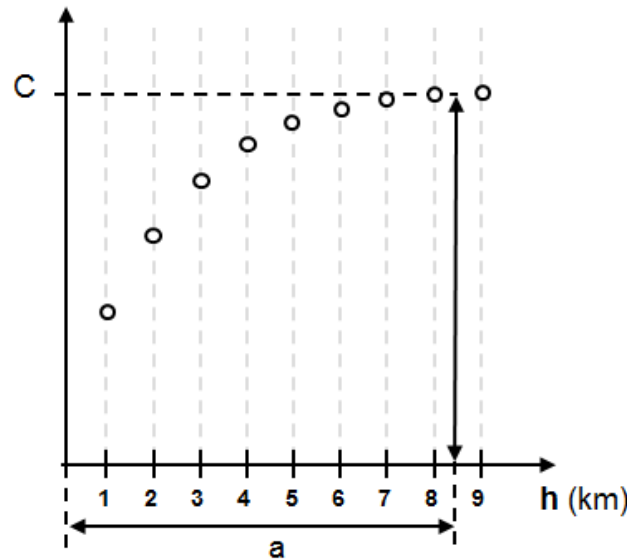
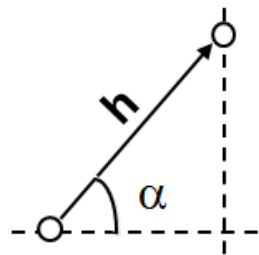


Cálculo do semivariograma a partir de amostras regularmente espaçadas.

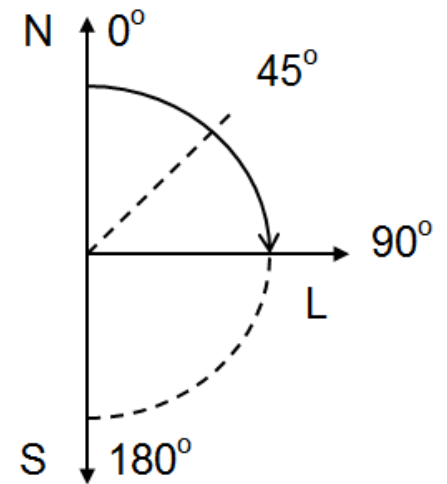


$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

vetor distância  $\mathbf{h}$



direções de análise

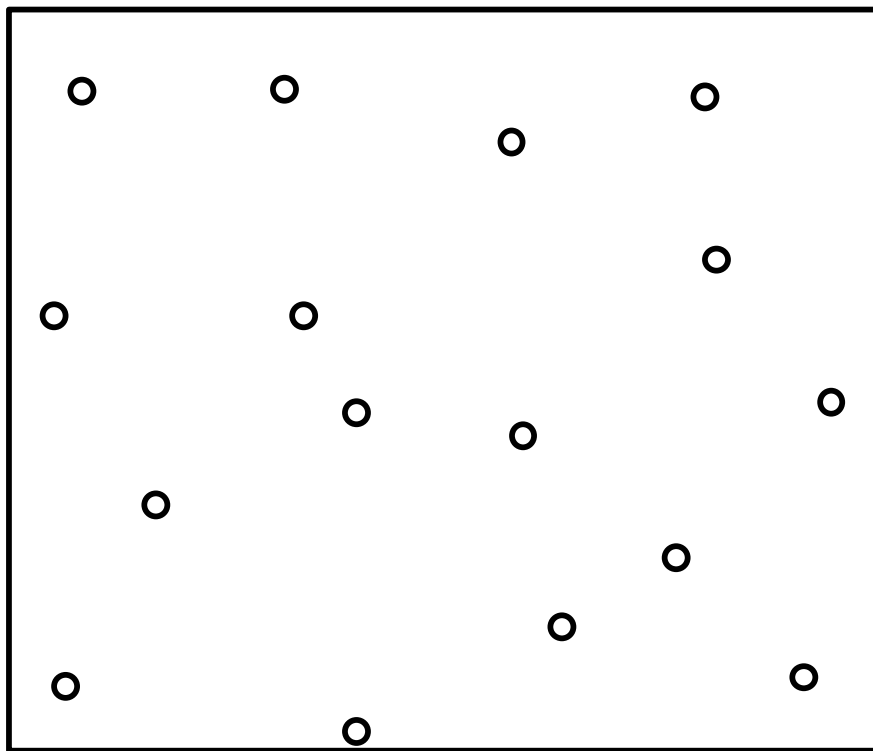


função simétrica

$$\gamma(\mathbf{h}) = -\gamma(\mathbf{h})$$

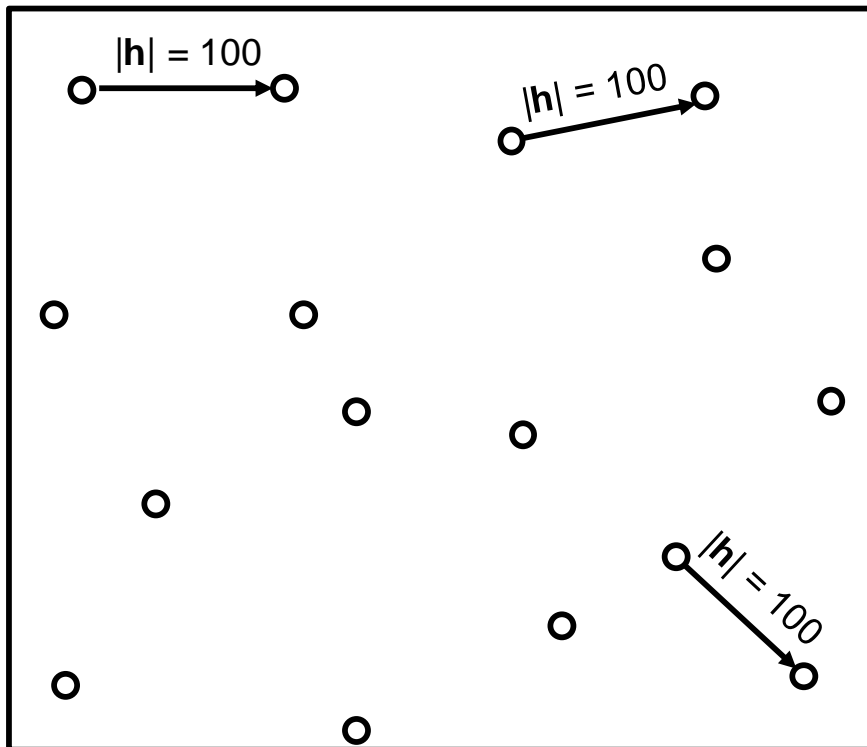
Cálculo do semivariograma a partir de amostras irregularmente espaçadas.

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$



Cálculo do semivariograma a partir de amostras irregularmente espaçadas.

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

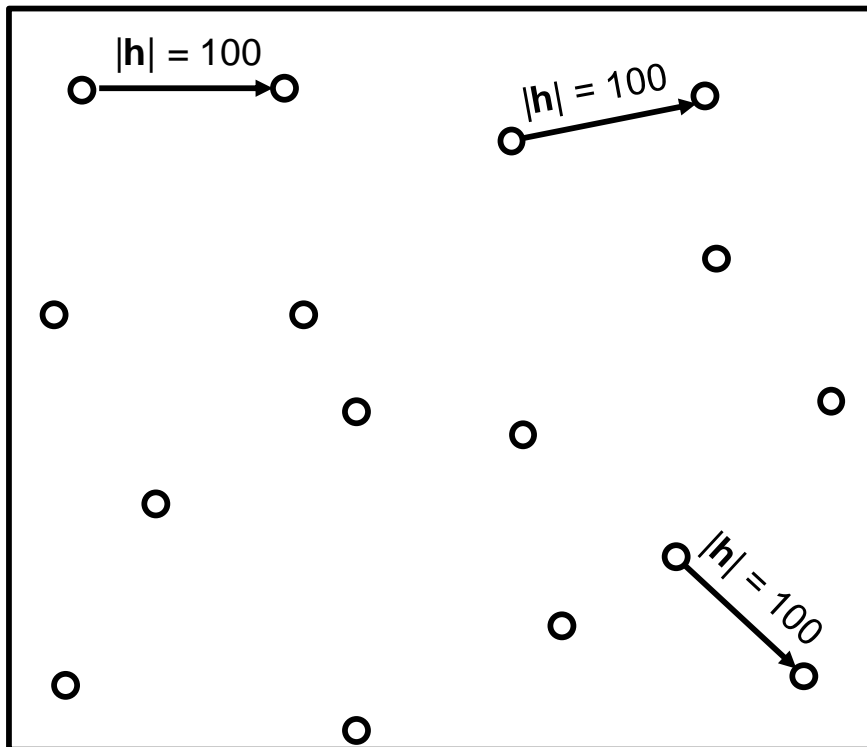


**Problema:** para uma certa distância de análise ( $|\mathbf{h}|$ ) e direção ( $\alpha$ ) há poucos pares de pontos, o que impossibilita o cálculo do estimador de semivariograma.



Cálculo do semivariograma a partir de amostras irregularmente espaçadas.

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

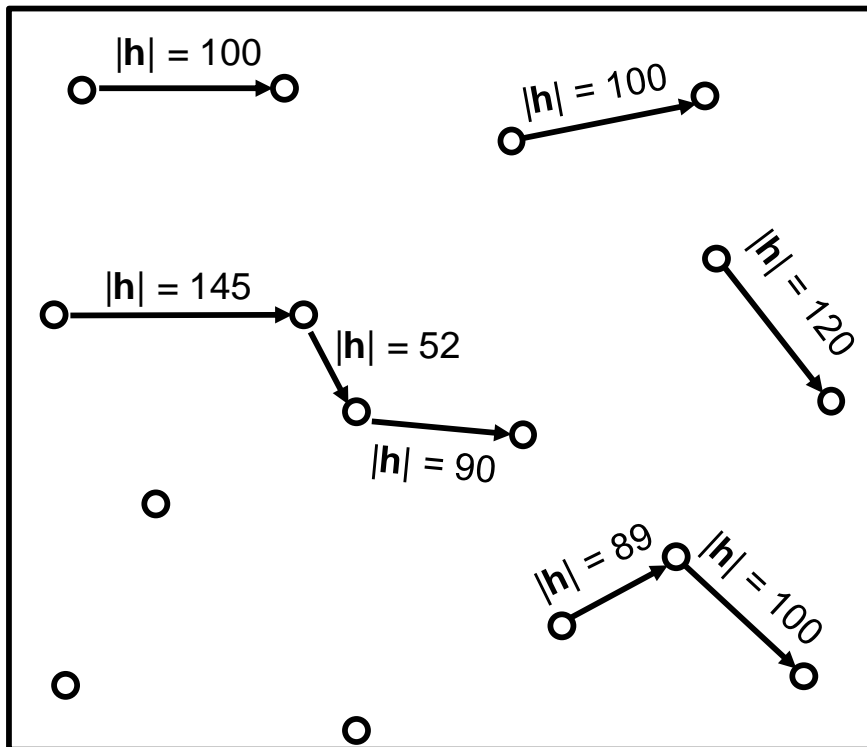


**Solução:** estabelecer parâmetros adicionais.

- **tolerância do incremento** (distância de análise  $|\mathbf{h}|$ ). Em geral é 50% de  $|\mathbf{h}|$ . Ex: para  $|\mathbf{h}| = 100 \Rightarrow [50 < |\mathbf{h}| < 150]$ .
- **tolerância angular**. Na geoestatística o mínimo é de  $+22,5^\circ$  e  $-22,5^\circ$  em torno da direção de análise ( $\alpha$ );
- **largura de banda**: limita o número de pares de pontos para grandes distâncias ( $|\mathbf{h}|$ ) de análise. Afeta a parte final do semivariograma. Normalmente este parâmetro não é utilizado.

Cálculo do semivariograma a partir de amostras irregularmente espaçadas.

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$



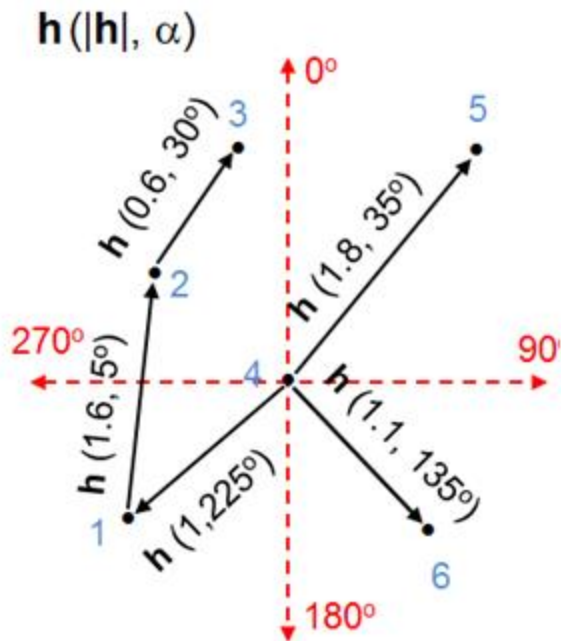
**Solução:** estabelecer parâmetros adicionais.

- **tolerância do incremento** (distância de análise  $|\mathbf{h}|$ ). Em geral é 50% de  $|\mathbf{h}|$ . Ex: para  $|\mathbf{h}| = 100 \Rightarrow [50 < |\mathbf{h}| < 150]$ .
- **tolerância angular**. Na geoestatística o mínimo é de  $+22,5^\circ$  e  $-22,5^\circ$  em torno da direção de análise ( $\alpha$ );
- **largura de banda**: limita o número de pares de pontos para grandes distâncias ( $|\mathbf{h}|$ ) de análise. Afeta a parte final do semivariograma. Normalmente este parâmetro não é utilizado.

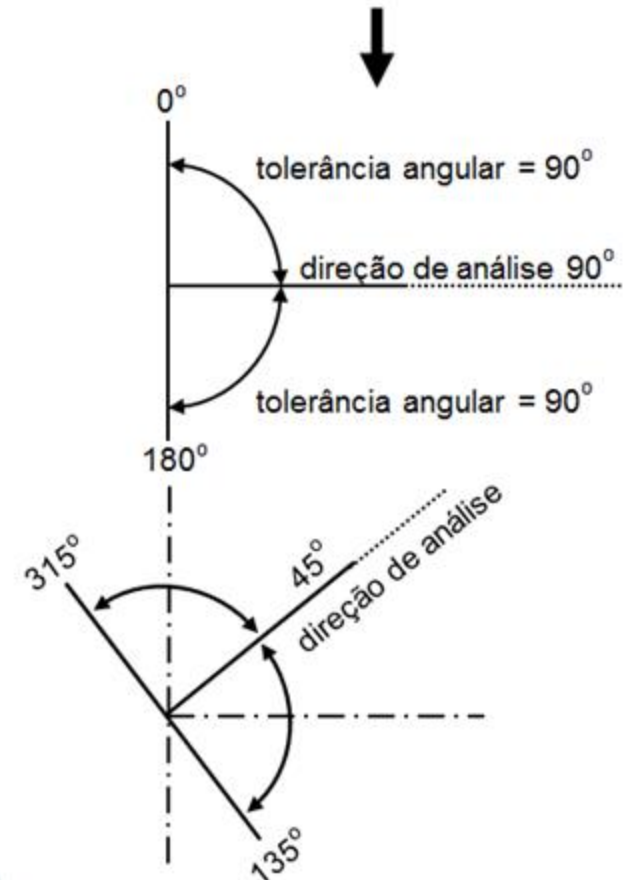
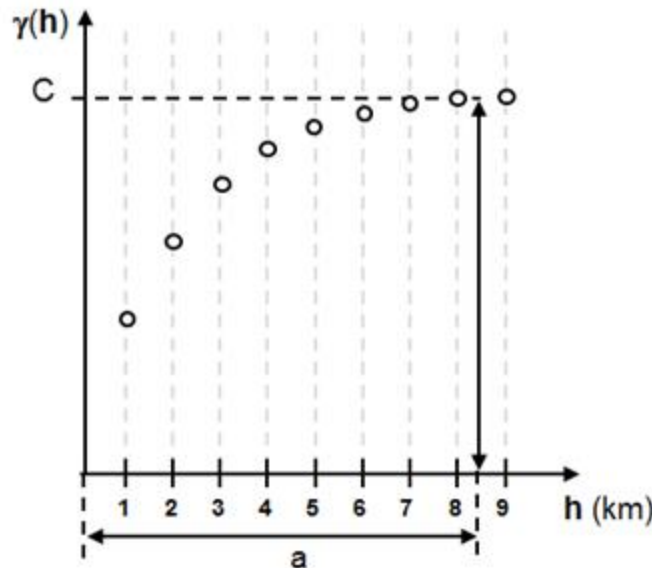
Cálculo do semivariograma a partir de amostras irregularmente espaçadas.

**Semivariograma omnidirecional** => tolerância angular =  $90^\circ$   
 direção de análise (do vetor  $\mathbf{h}$ ) não importa.

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$



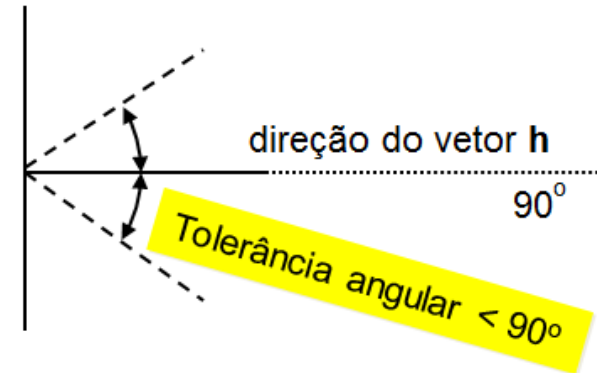
Exemplo:  
 incremento (lag) = 1 km  
 tolerância lag = 0,5 km



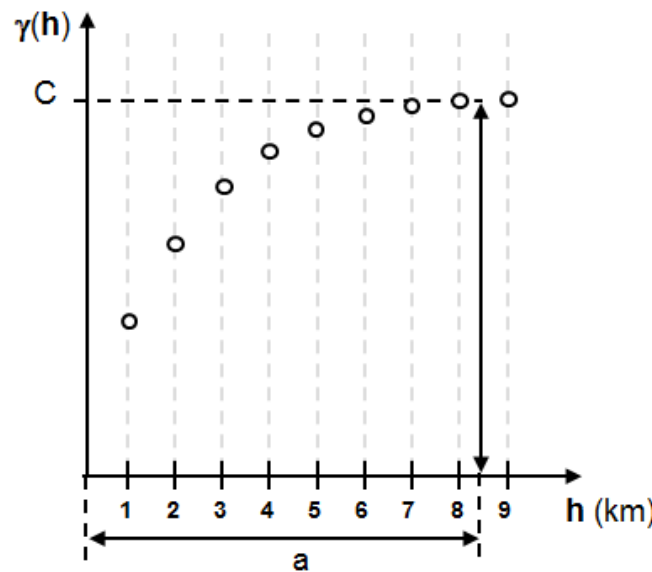
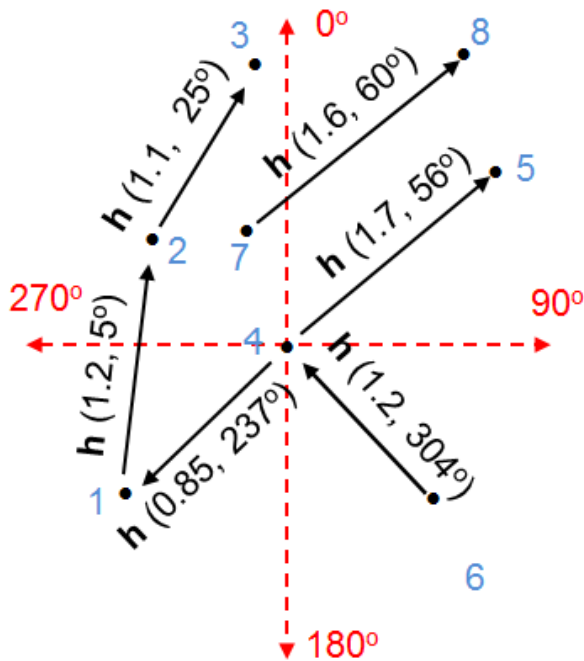
Cálculo do semivariograma a partir de amostras irregularmente espaçadas.

**Semivariograma direcional** => tolerância angular < 90°

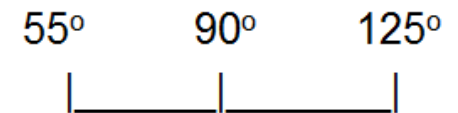
$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(u_i) - z(u_i + h)]^2$$



$h(|h|, \alpha)$

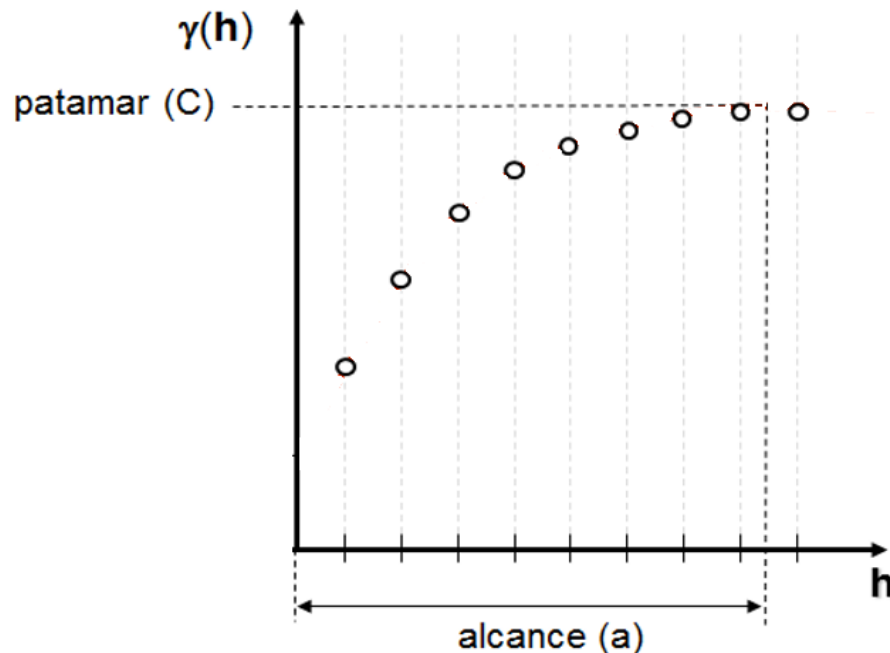


Exemplo:  
 incremento = 1 km  
 tolerância lag = 0,5 km  
 direção de análise = 90°  
 tolerância angular = 35°



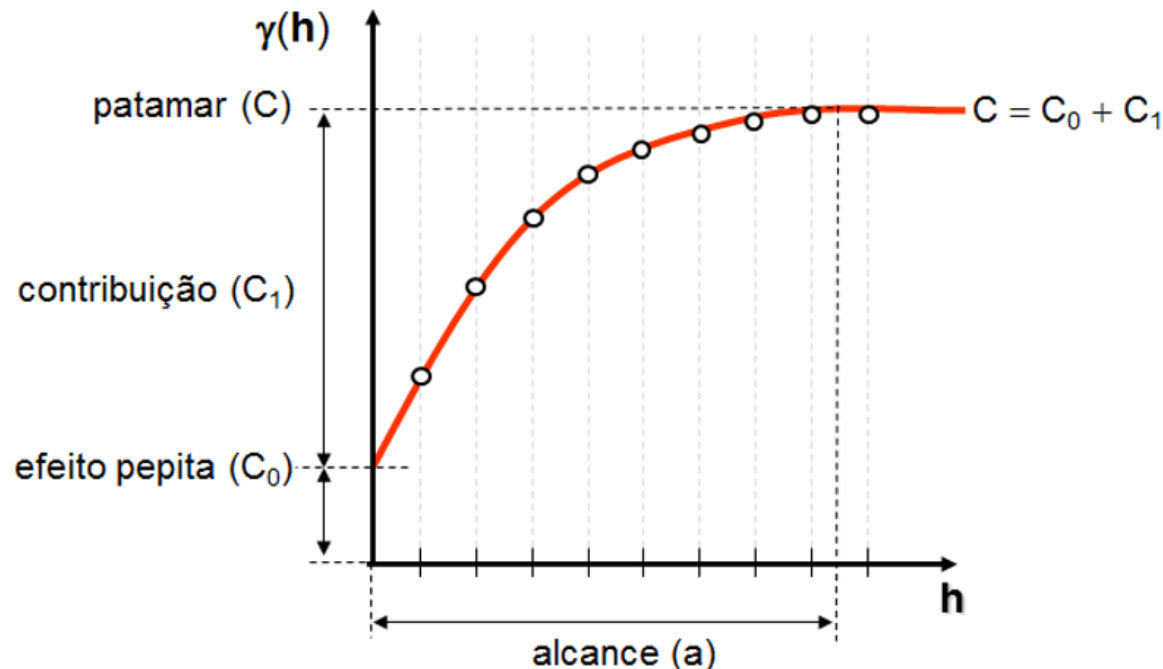
O gráfico do semivariograma empírico estimado por  $\hat{\gamma}(\mathbf{h})$  é formado por uma série de valores, sobre os quais se objetiva ajustar uma função.

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$



O gráfico do semivariograma empírico estimado por  $\hat{\gamma}(\mathbf{h})$  é formado por uma série de valores, sobre os quais se objetiva ajustar uma função.

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$

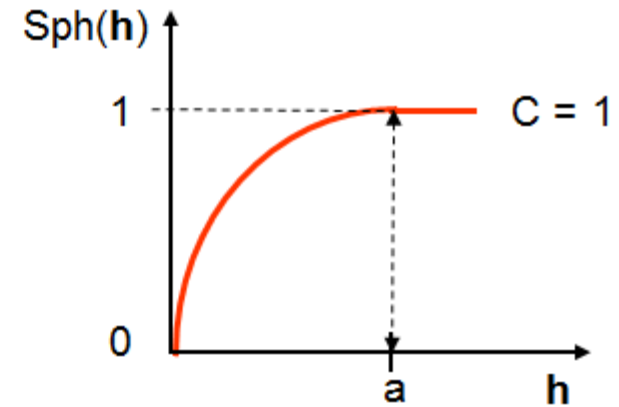


O modelo de ajuste deve representar o melhor possível o comportamento de  $\gamma(\mathbf{h})$ .

## Modelo de ajuste esférico

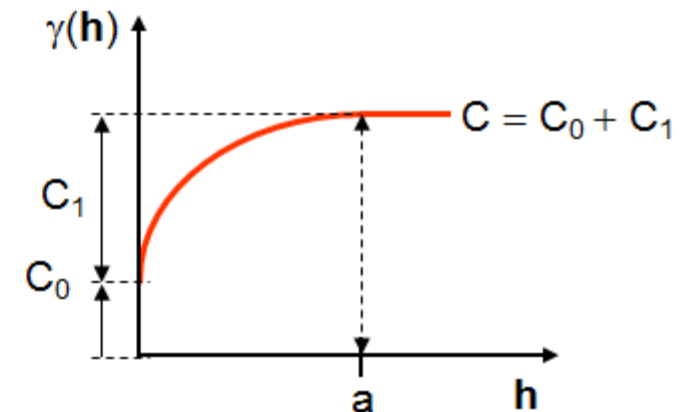
- Normalizado

$$\text{Sph}(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & , |\mathbf{h}|=0 \\ 1,5\left(\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right) - 0,5\left(\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right)^3 & , 0 < |\mathbf{h}| \leq a \\ 1 & , |\mathbf{h}| > a \end{cases}$$



- Na prática:  $C_0 > 0$  e  $C_1 > 1$

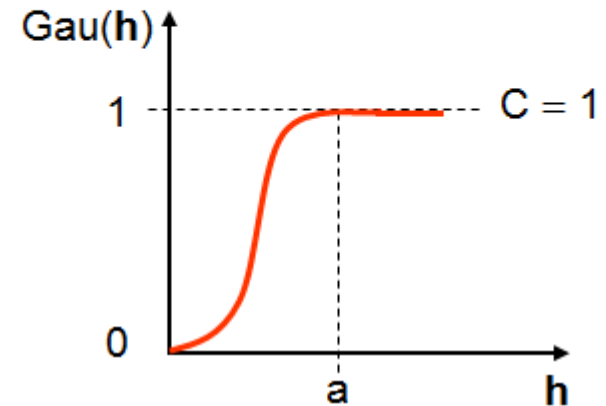
$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0, & \\ C_0 + C_1 \left[ \frac{3}{2}\left(\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right)^3 \right] = C_0 + C_1 [\text{Sph}(\mathbf{h})], & 0 < |\mathbf{h}| \leq a \\ C_0 + C_1, & |\mathbf{h}| > a \end{cases}$$



## Modelo de ajuste gaussiano

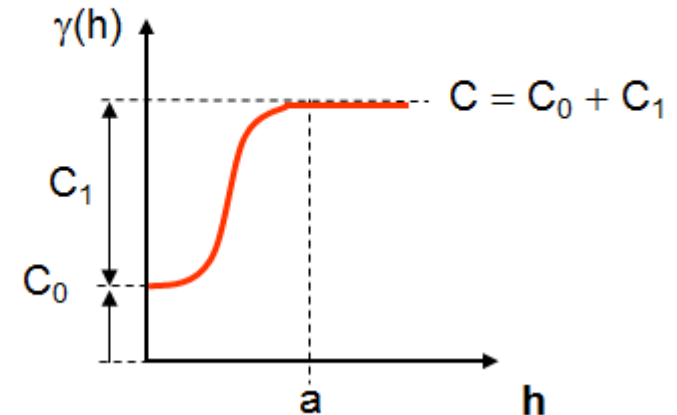
- Normalizado

$$\text{Gau}(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & , |\mathbf{h}| = 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{h}|^2}{a}\right) & , |\mathbf{h}| \neq 0 \end{cases}$$



- Na prática:  $C_0 > 0$  e  $C_1 > 1$

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0, & C_0 \\ C_0 + C_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{h}|^2}{a}\right) \right] = C_0 + C_1[\text{Gau}(\mathbf{h})], & 0 < |\mathbf{h}| \leq a \\ C_0 + C_1, & |\mathbf{h}| > a \end{cases}$$

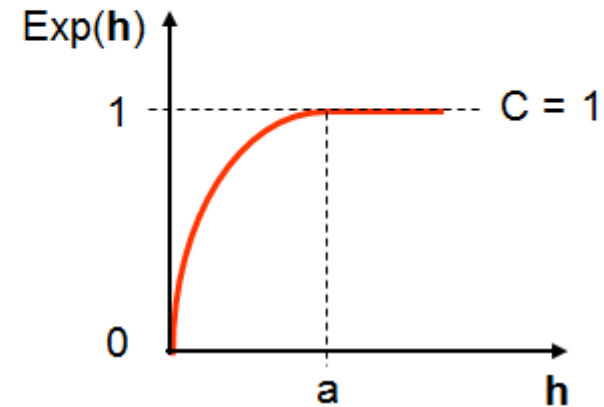




## Modelo de ajuste exponencial

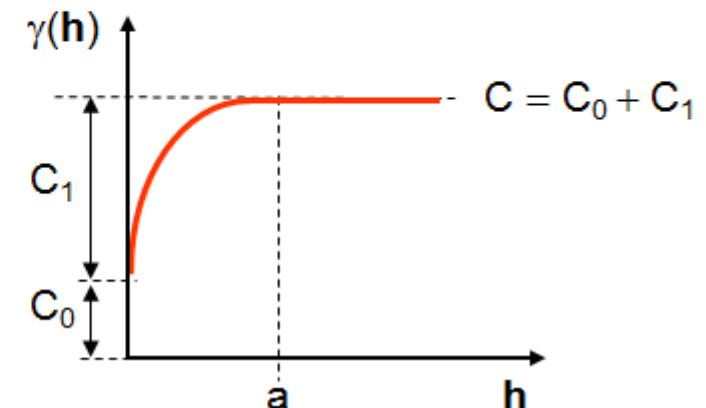
- Normalizado

$$\text{Exp}(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & , |\mathbf{h}| = 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right) & , |\mathbf{h}| \neq 0 \end{cases}$$



- Na prática:  $C_0 > 0$  e  $C_1 > 1$

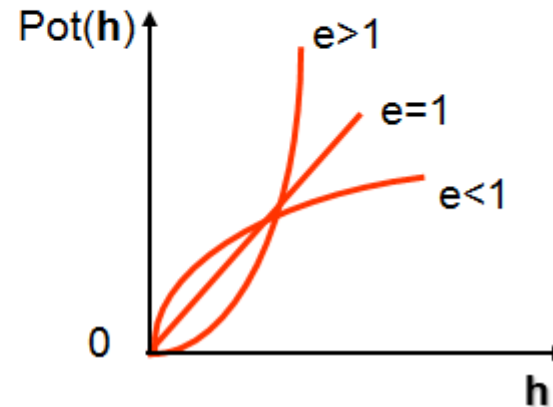
$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0, & \\ C_0 + C_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right) \right] = C_0 + C_1 [\text{Exp}(\mathbf{h})], & 0 < |\mathbf{h}| \leq a \\ C_0 + C_1, & |\mathbf{h}| > a \end{cases}$$



## Modelo de ajuste potência

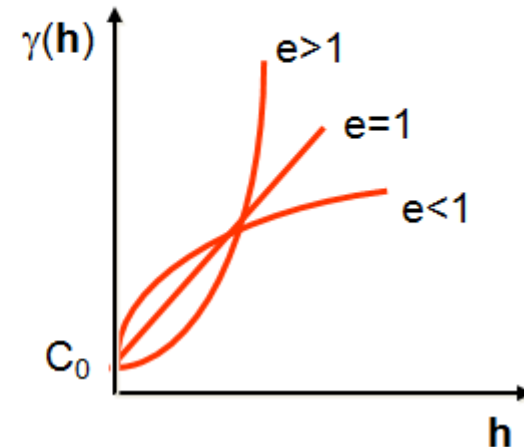
- Normalizado

$$\text{Pot}(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & ,|\mathbf{h}|=0 \\ c \cdot |\mathbf{h}|^e & ,|\mathbf{h}| \neq 0 \end{cases}$$



- Na prática:  $C_0 > 0$  e  $C_1 > 1$

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & ,C_0 \\ C_0 + c \cdot |\mathbf{h}|^e = C_0 + \text{Pot}(|\mathbf{h}|) & ,|\mathbf{h}| > 0 \end{cases}$$

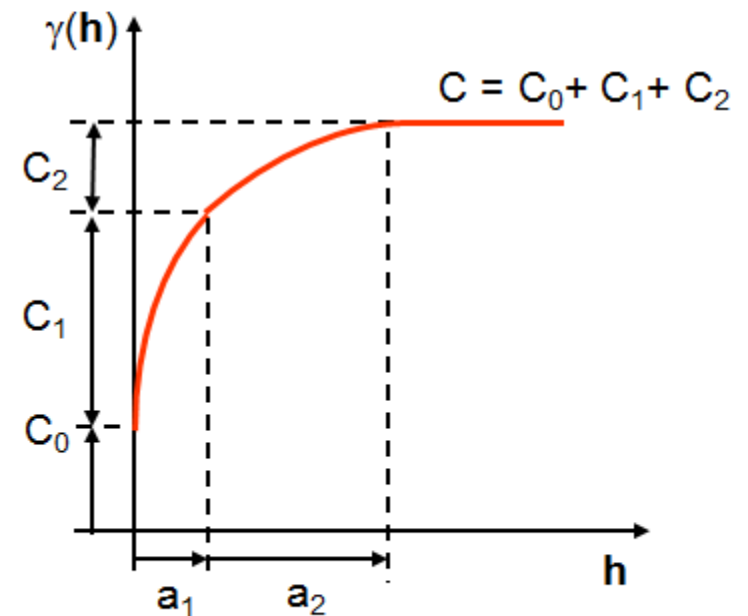


## Modelo de ajuste aninhados

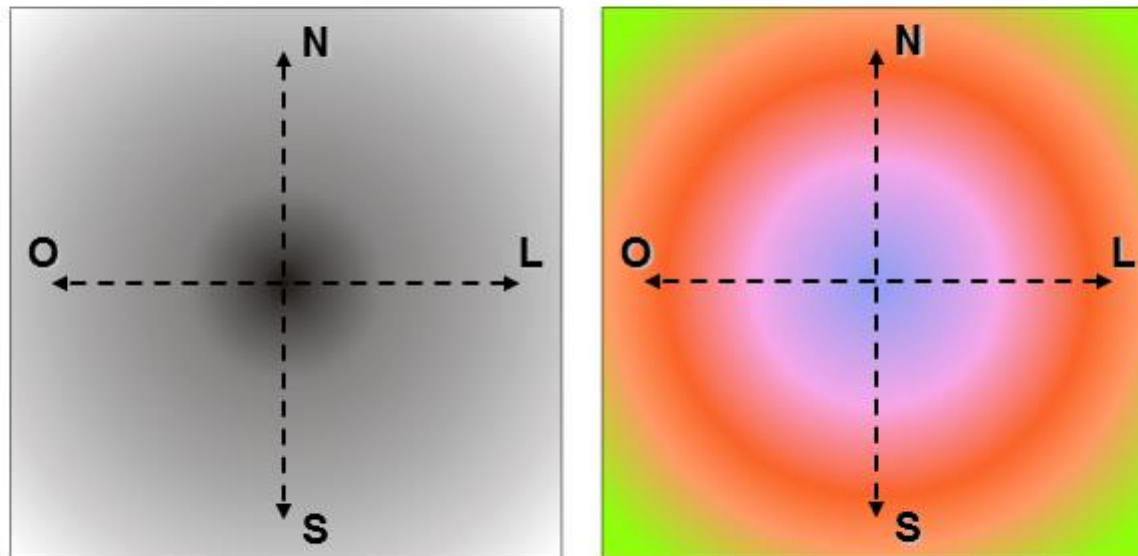
Existem determinados fenômenos em que são necessários modelos mais complexos de semivariograma para explicar suas variações espaciais. Estes modelos são combinações de modelos simples, denominados *aninhados*.

Ex: Modelo aninhado duplo esférico

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0, & C_0 \\ C_0 + C_1 \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{|\mathbf{h}|}{a_1} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{|\mathbf{h}|}{a_1} \right)^3 \right] = \gamma_1(\mathbf{h}), & 0 < |\mathbf{h}| \leq a_1 \\ C_0 + C_2 \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{|\mathbf{h}|}{a_2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{|\mathbf{h}|}{a_2} \right)^3 \right] = \gamma_2(\mathbf{h}), & a_1 < |\mathbf{h}| \leq a_2 \\ C_0 + C_1 + C_2, & |\mathbf{h}| > a_2 \end{cases}$$

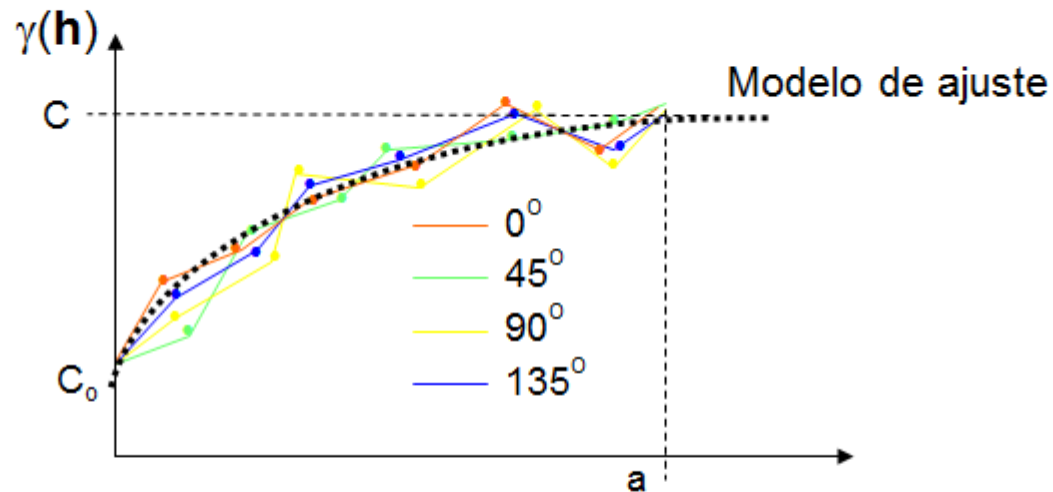


Quando a variabilidade espacial de um fenômeno em estudo é a mesma em todas as direções diz-se que o fenômeno é **isotrópico**.



Dispersão de um fenômeno geográfico isotrópico.

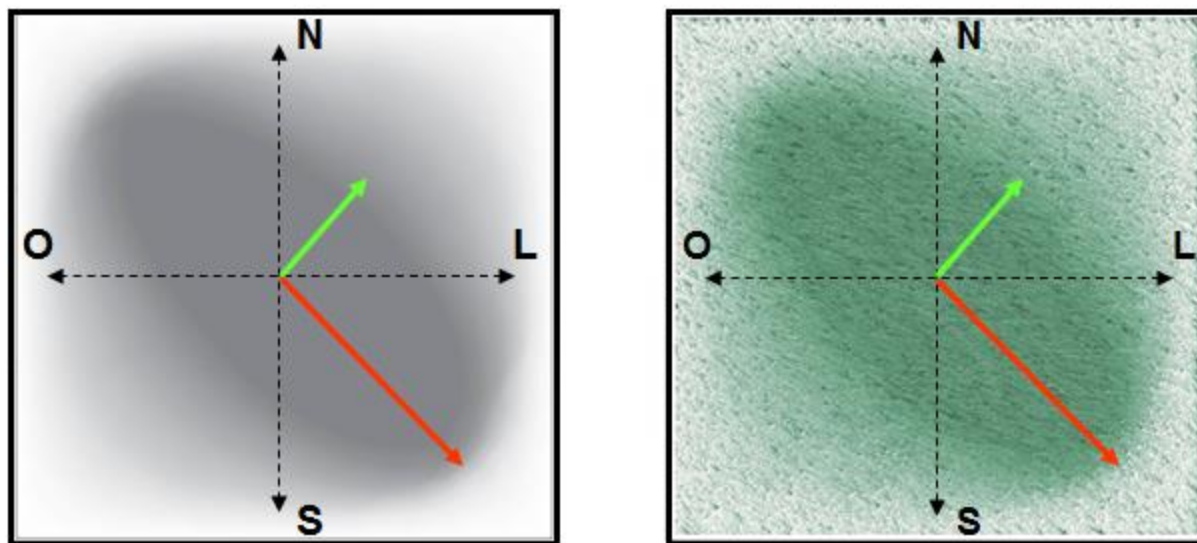
Considere os semivariogramas ilustrados na figura abaixo



Esta é a representação de um caso simples e menos freqüente, em que a distribuição espacial do fenômeno é denominada *isotrópica*.

Neste caso, um único modelo é suficiente para descrever a variabilidade espacial do fenômeno em estudo.

Quando a continuidade espacial de um fenômeno em estudo não é a mesma em todas as direções diz-se que o fenômeno é ***anisotrópico***.



Dispersão de um fenômeno geográfico anisotrópico.

direções de continuidade espacial

— maior

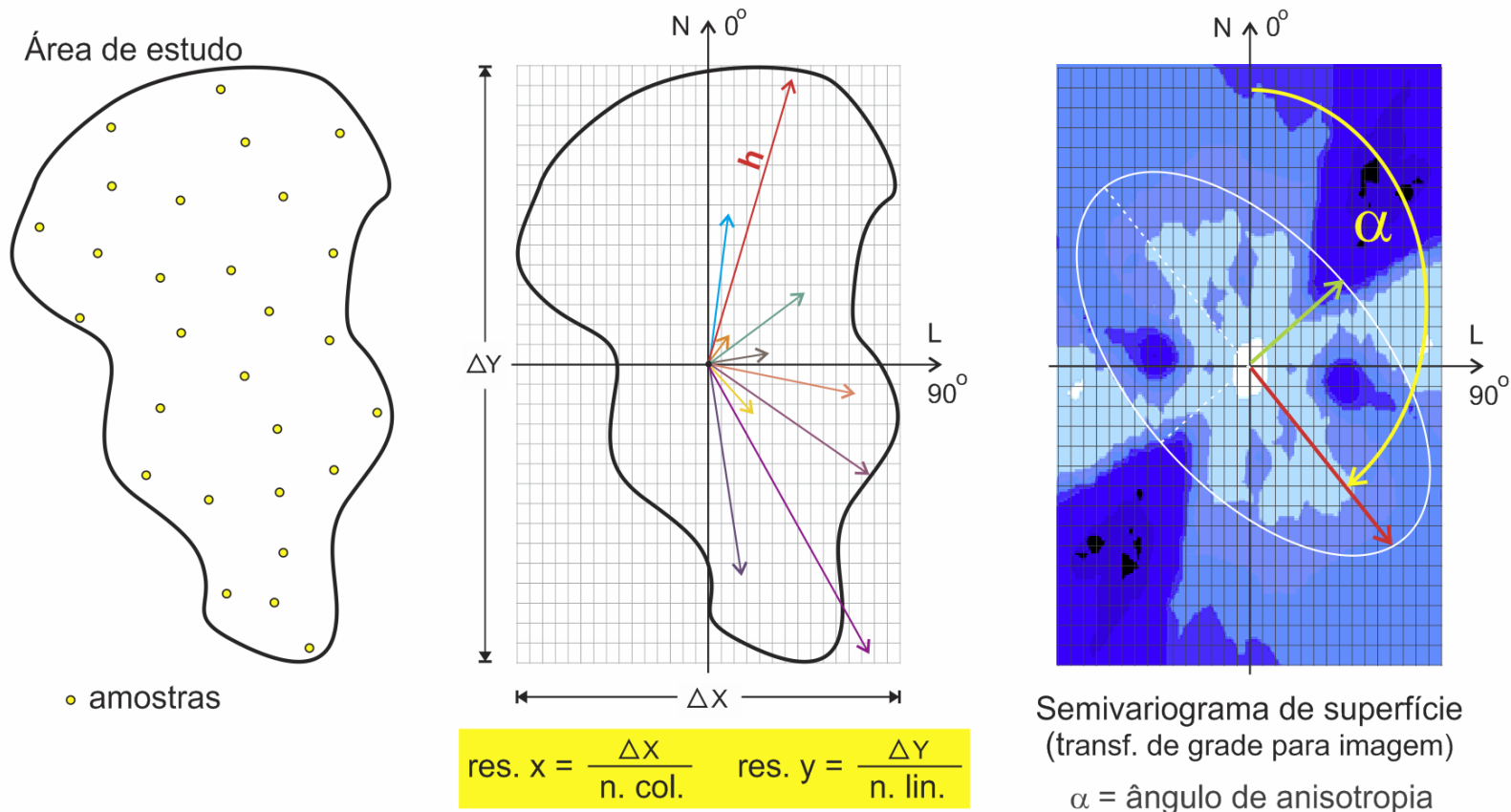
— menor

Como detectar a anisotropia?

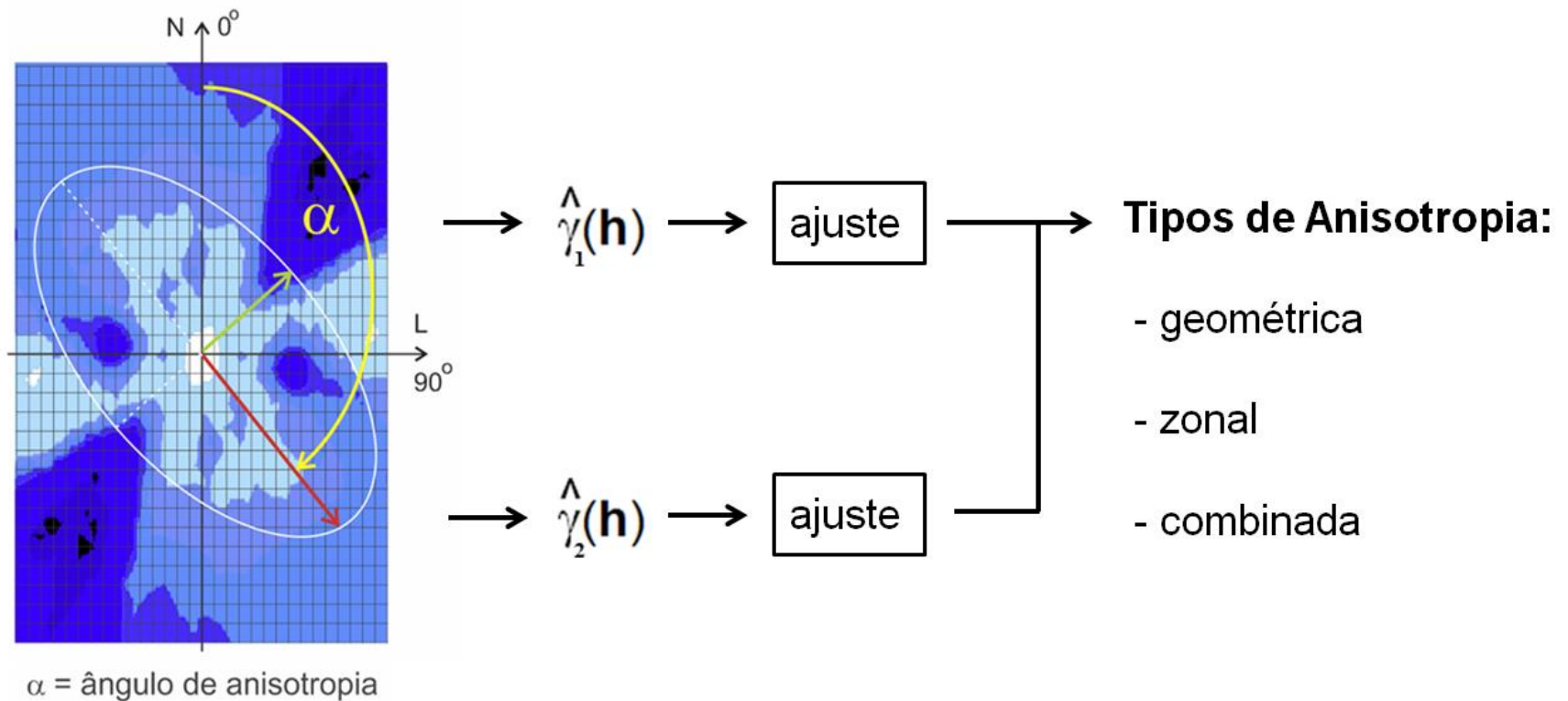
Uma forma imediata é através do semivariograma de superfície, também denominado na literatura de *mapa de semivariograma*.

A idéia é relativamente simples.

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(\mathbf{u}_i) - z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})]^2$$



Uma vez detectado os eixos de anisotropia, faz-se necessário estabelecer para as direções de menor e maior continuidade o semivariograma empírico e posteriormente seu modelo de ajuste.

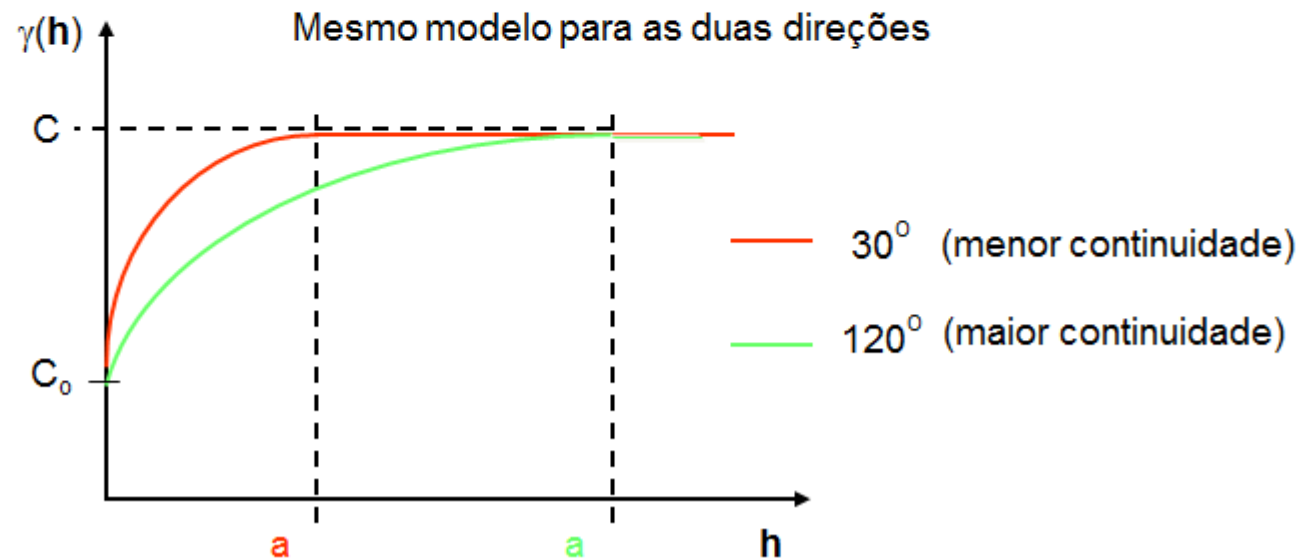




## Anisotropia geométrica

Neste caso, os semivariogramas direcionais apresentam o mesmo Patamar ( $C$ ), o mesmo Efeito peita ( $C_0$ ) e diferentes Alcances ( $a$ ), ambos com o mesmo modelo.

Exemplo:

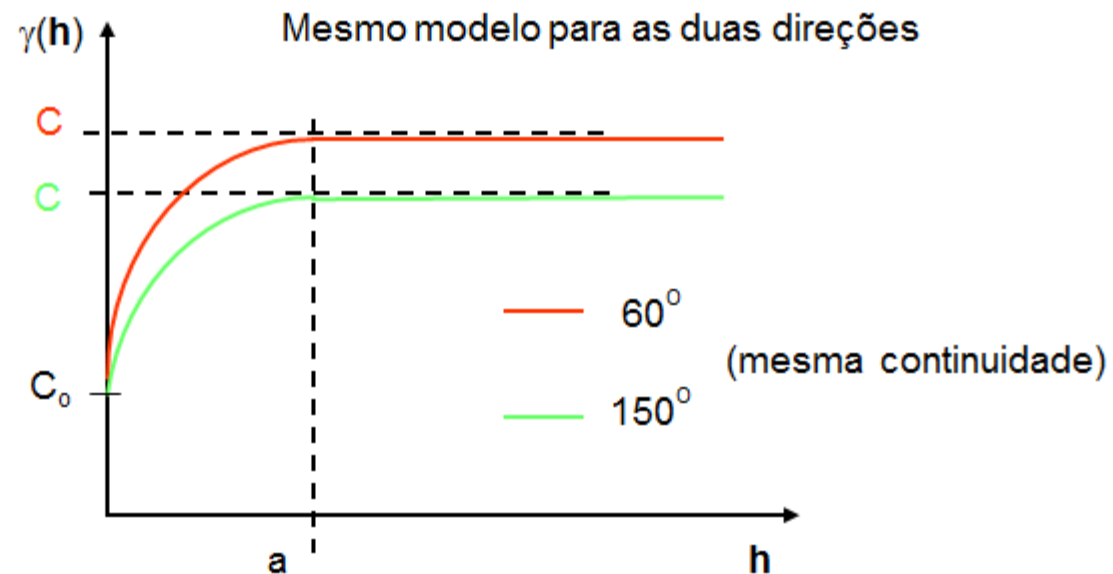


## Anisotropia zonal

Neste caso, os semivariogramas direcionais apresentam diferentes Patamares ( $C$ ), o mesmo Efeito Pepita ( $C_0$ ) e mesmo alcance ( $a$ ), ambos com o mesmo modelo.

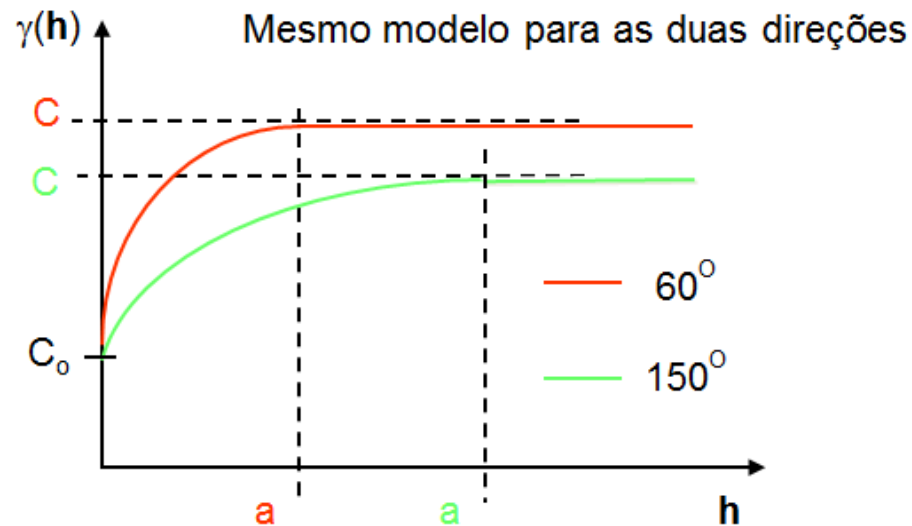
Como a isotropia, a **anisotropia zonal** é um caso menos freqüente presente nos fenômenos naturais.

Exemplo:



## Anisotropia combinada (geométrica + zonal)

Neste caso, os semivariogramas apresentam diferentes patamares (C) e diferentes alcances (a) para o mesmo modelo. Pode apresentar também diferentes efeitos pepita.



## **Modelagem da Anisotropia**

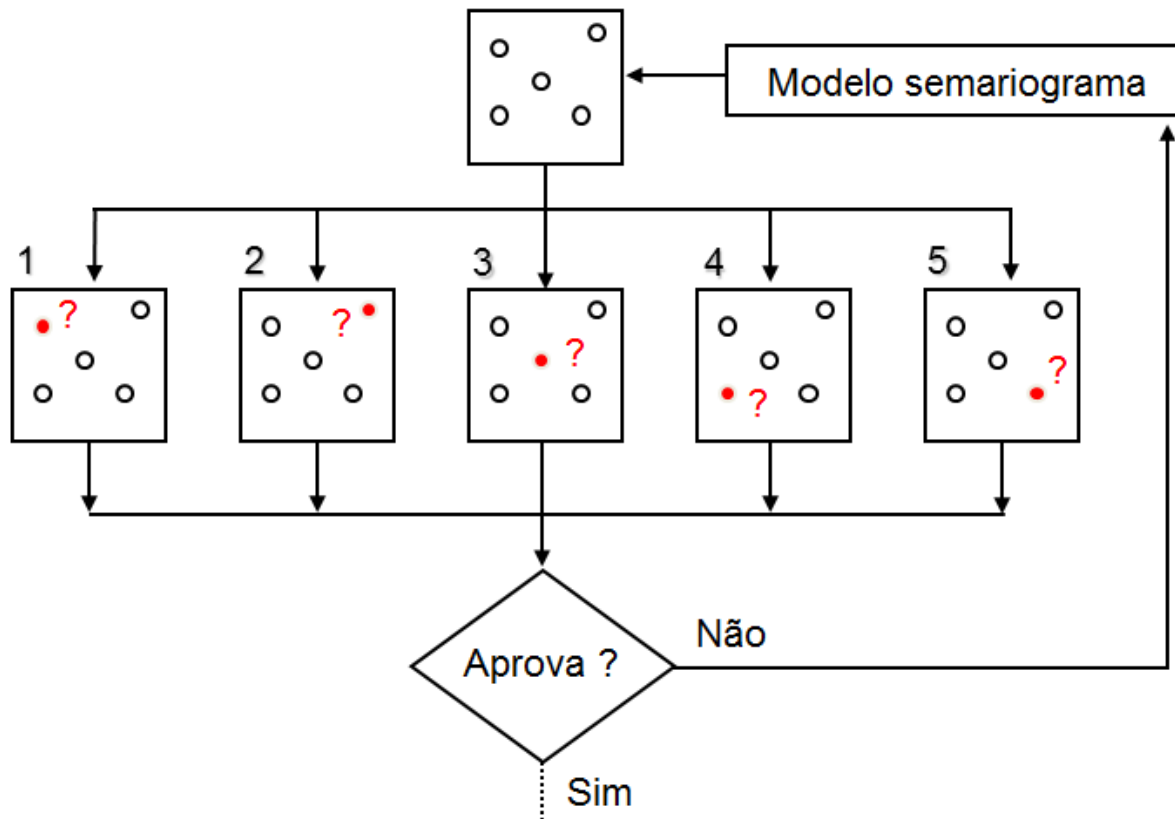
### **Livro de Análise Espacial de Dados Geográficos**

disponível em: <http://www.dpi.inpe.br/gilberto/livro/analise/>

### **Capítulo 3 – Apêndice: Modelagem da Anisotropia**

## Validação cruzada

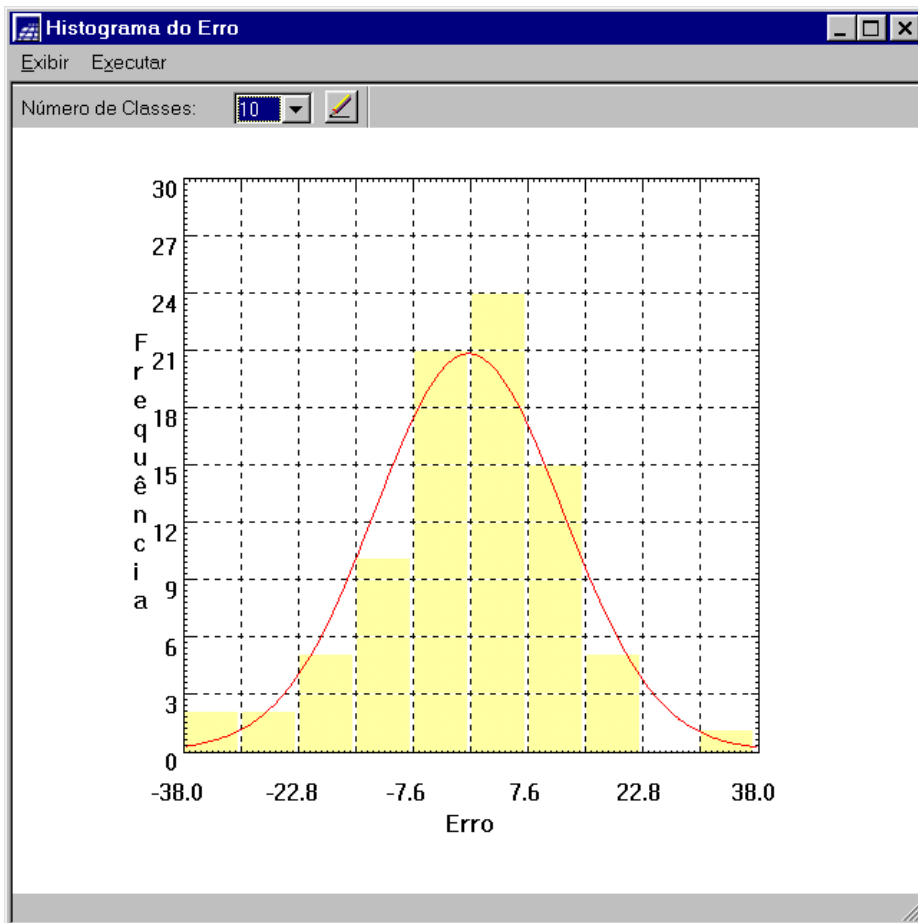
É um procedimento para verificar a adequação do modelo de ajuste ao semivariograma



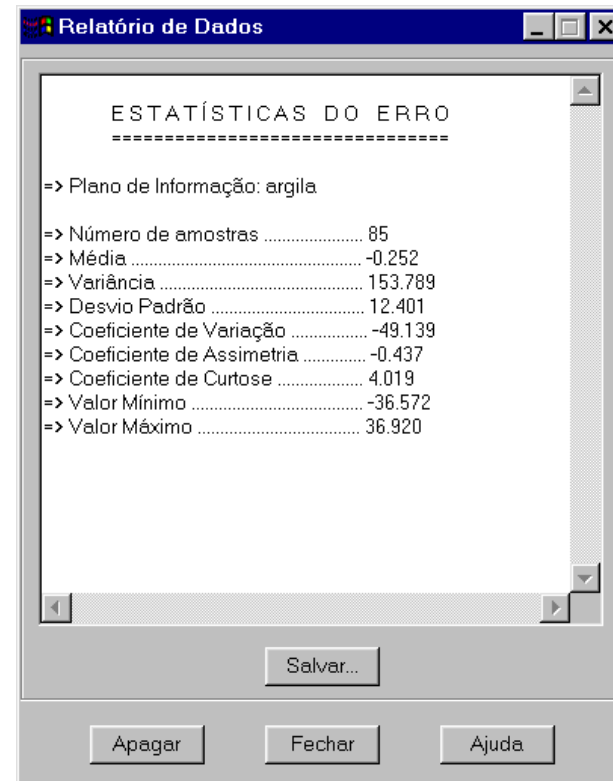
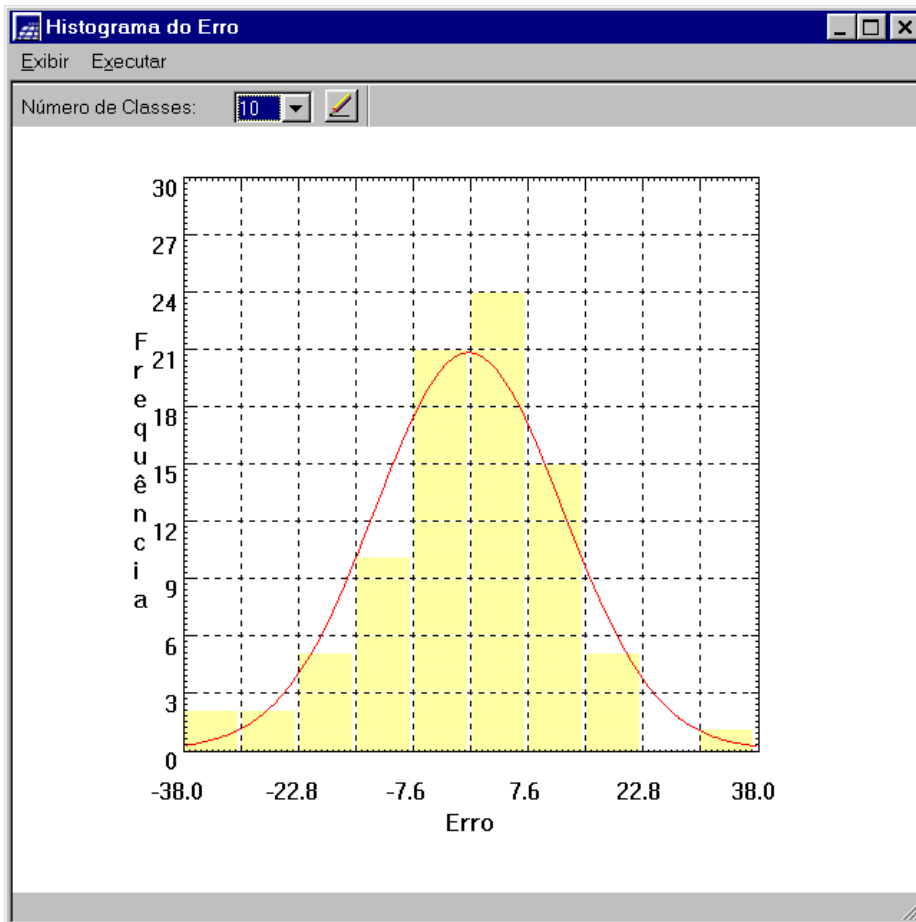
### Análises

- estatísticas do erro
- histograma do erro
- diagrama espacial do erro
- diagrama de valores observados versus estimados

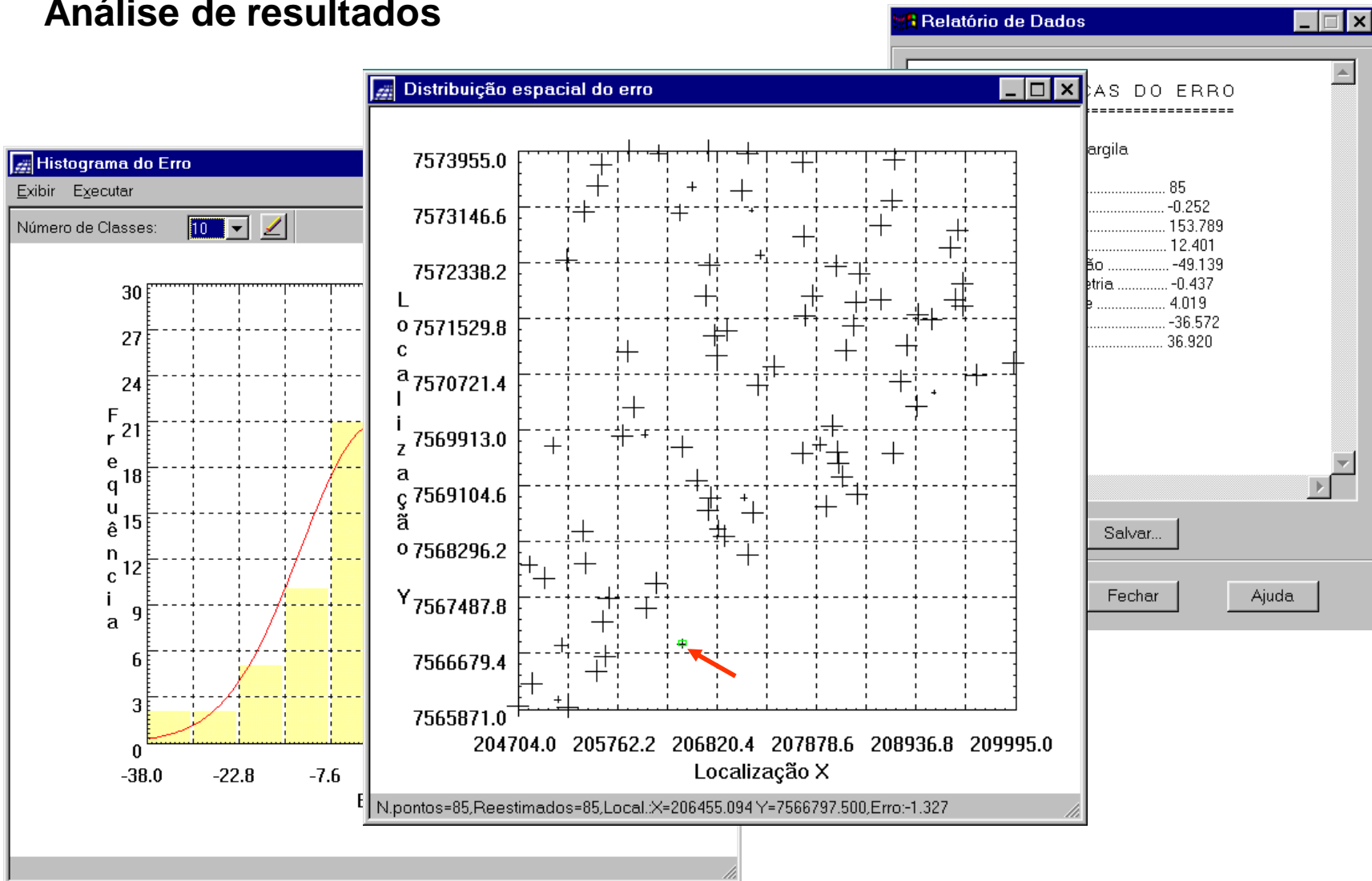
## Análise de resultados



## Análise de resultados

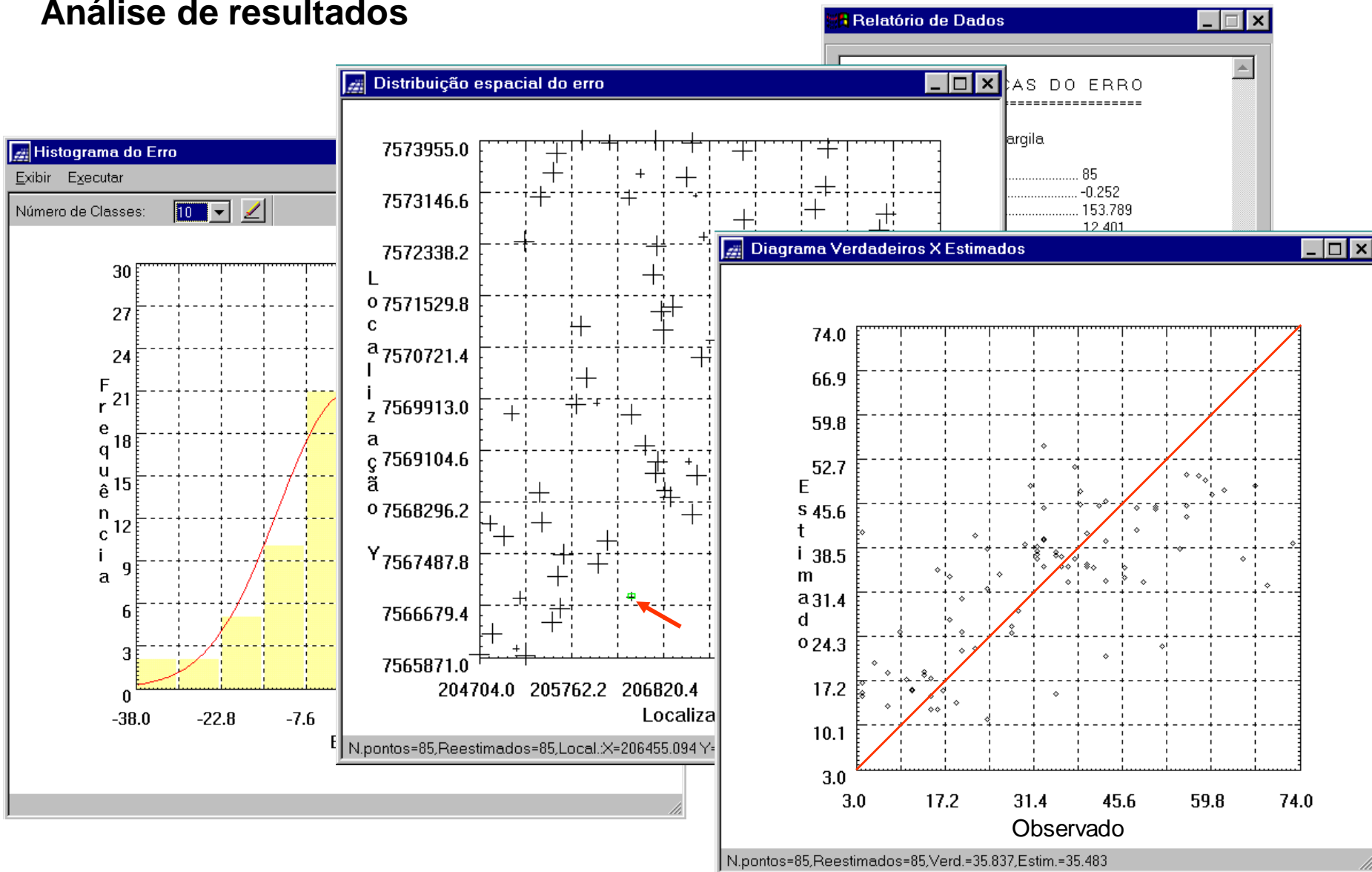


## Análise de resultados





## Análise de resultados



O termo **krigeagem** é derivado do nome *Daniel G. Krige*

A **krigeagem** é um estimador estocástico que depende da análise de correlação espacial baseada em semivariograma.

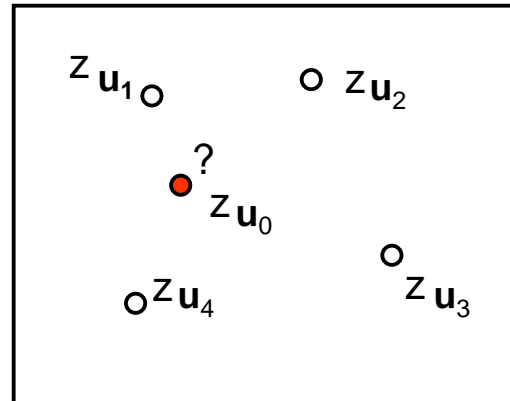
Áreas de Aplicações:

- mapeamento geológico (*Verly et al., 1984*)
- mapeamento solo (*Burgess e Webster, 1980*)
- mapeamento hidrológico (*Kitanidis et. al., 1983*)
- mapeamento atmosférico (*Lajaunie, 1984*)

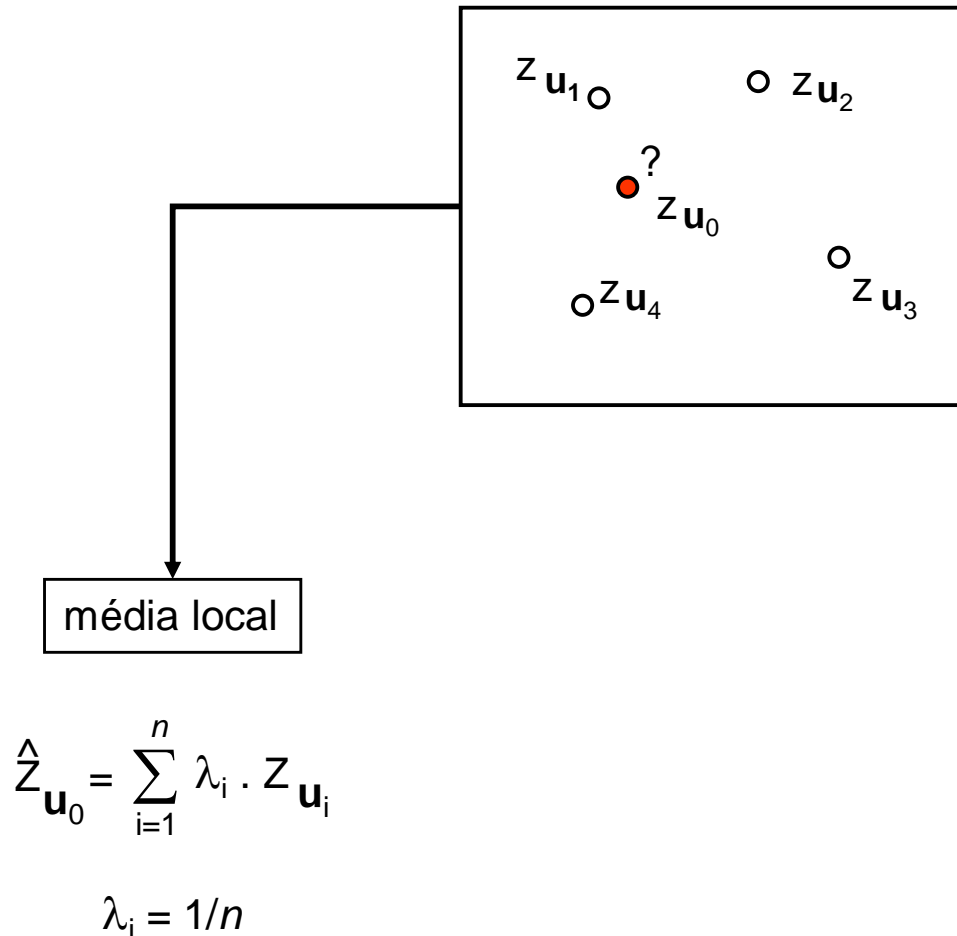
A krigeagem engloba um conjunto de estimadores:

- krigeagem Simples (\*)
- krigeagem Ordinária (\*)
- krigeagem Universal
- co-krigeagem
- krigeagem por indicação
- Outros

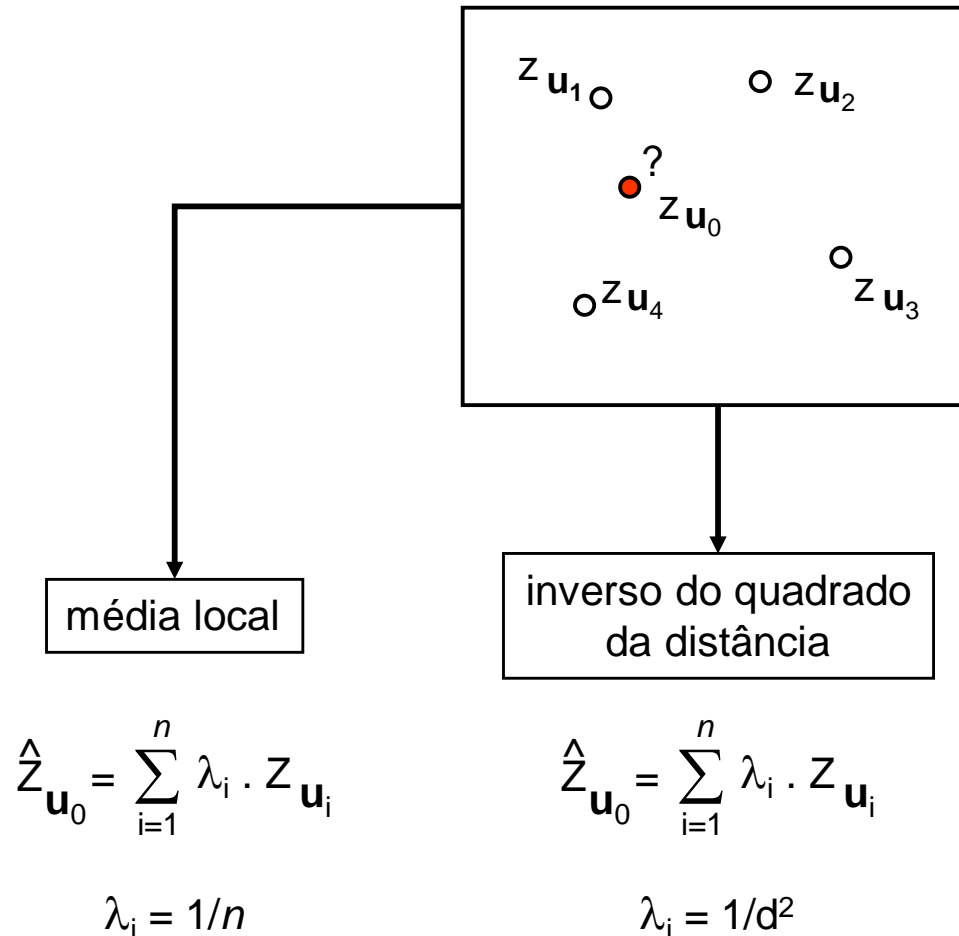
Envolve uma combinação linear de  $n$  valores em pontos vizinhos.



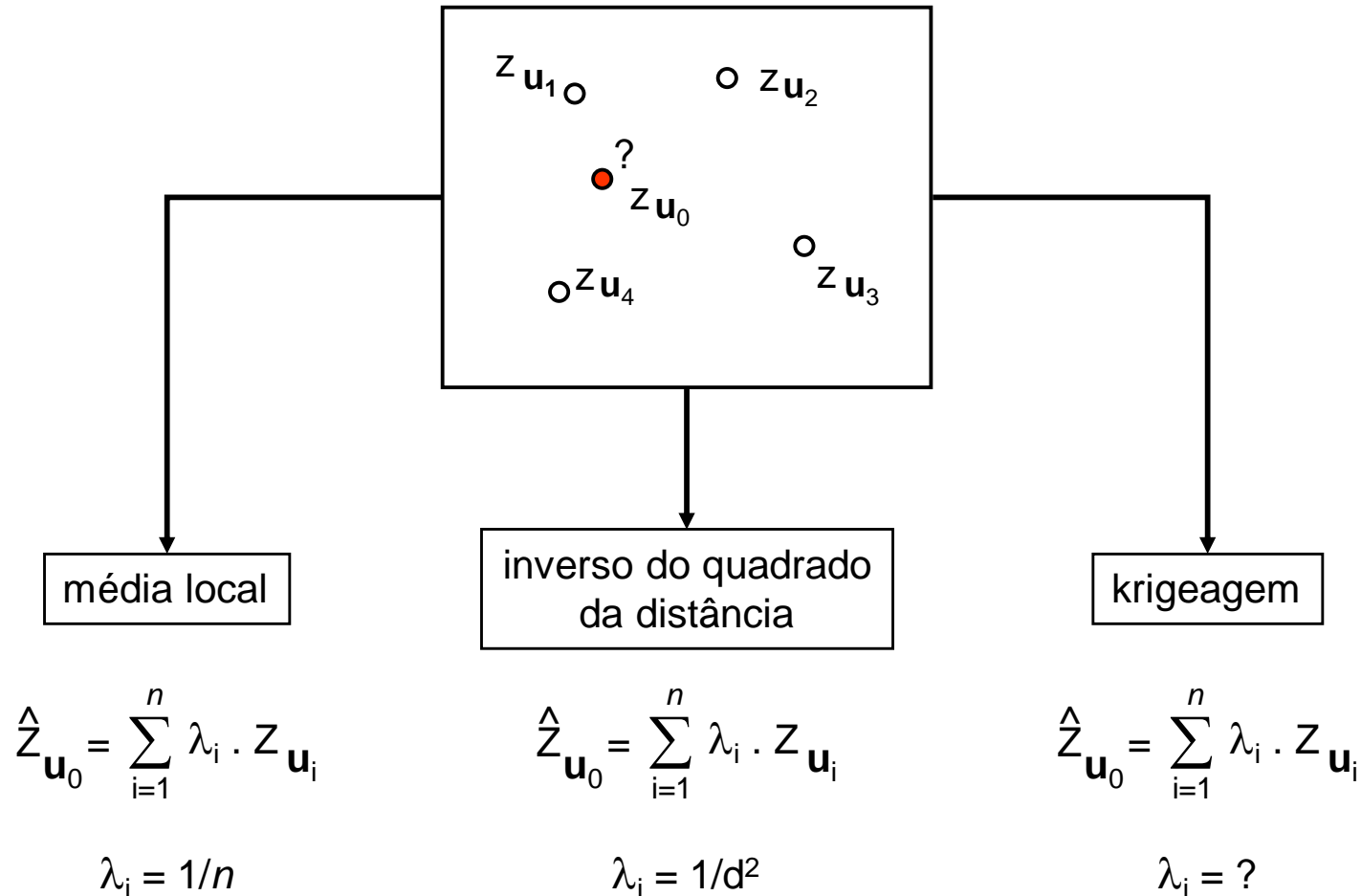
Envolve uma combinação linear de  $n$  valores em pontos vizinhos.



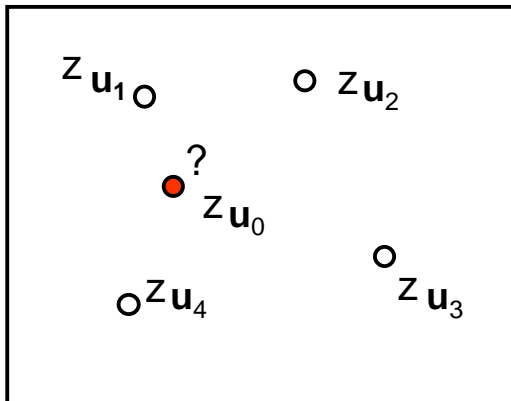
Envolve uma combinação linear de  $n$  valores em pontos vizinhos.



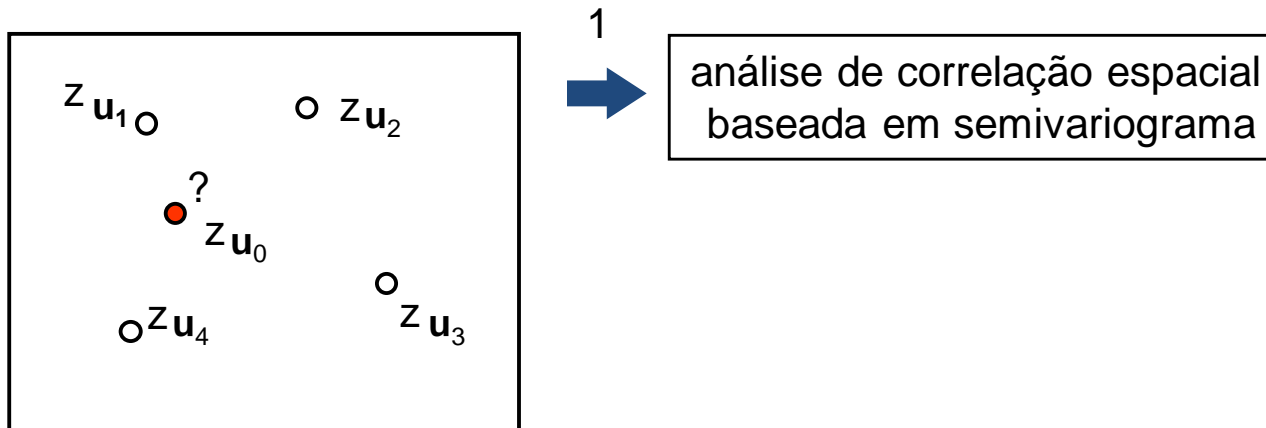
Envolve uma combinação linear de  $n$  valores em pontos vizinhos.



Os pesos são calculados considerando a estrutura de correlação espacial imposta pelo semivariograma

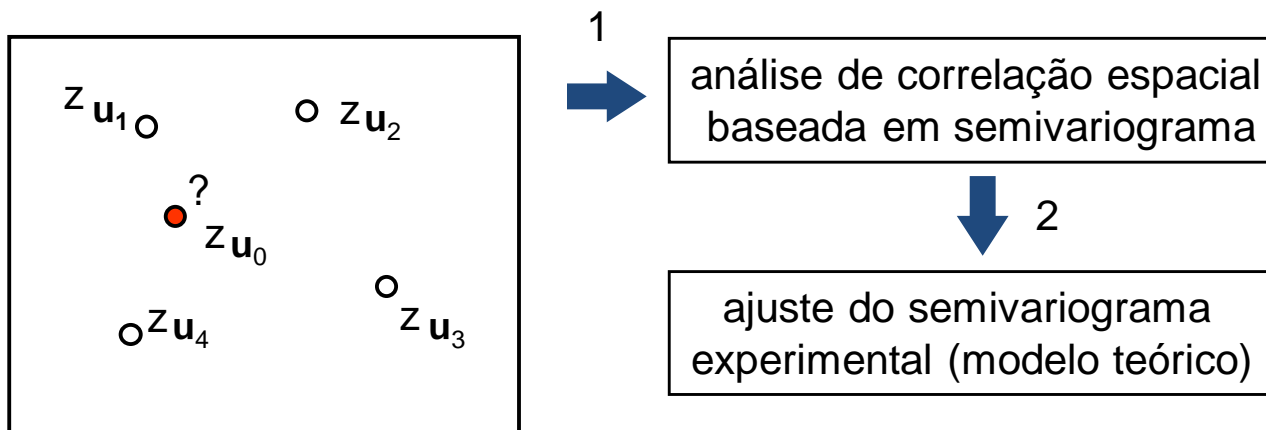


Os pesos são calculados considerando a estrutura de correlação espacial imposta pelo semivariograma

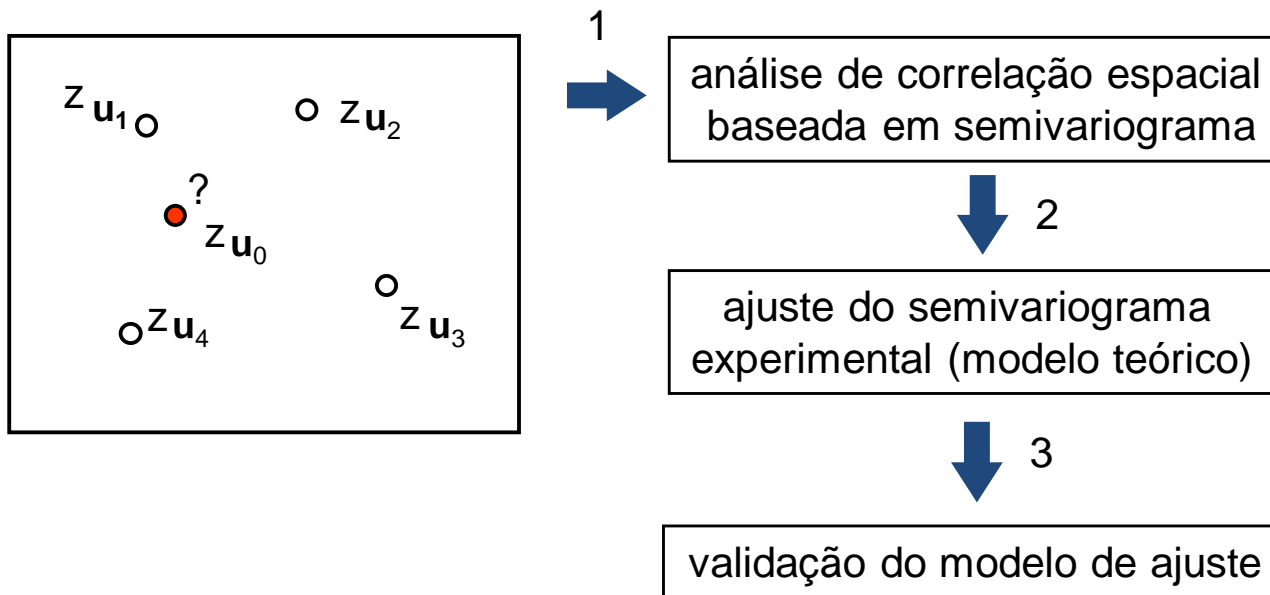




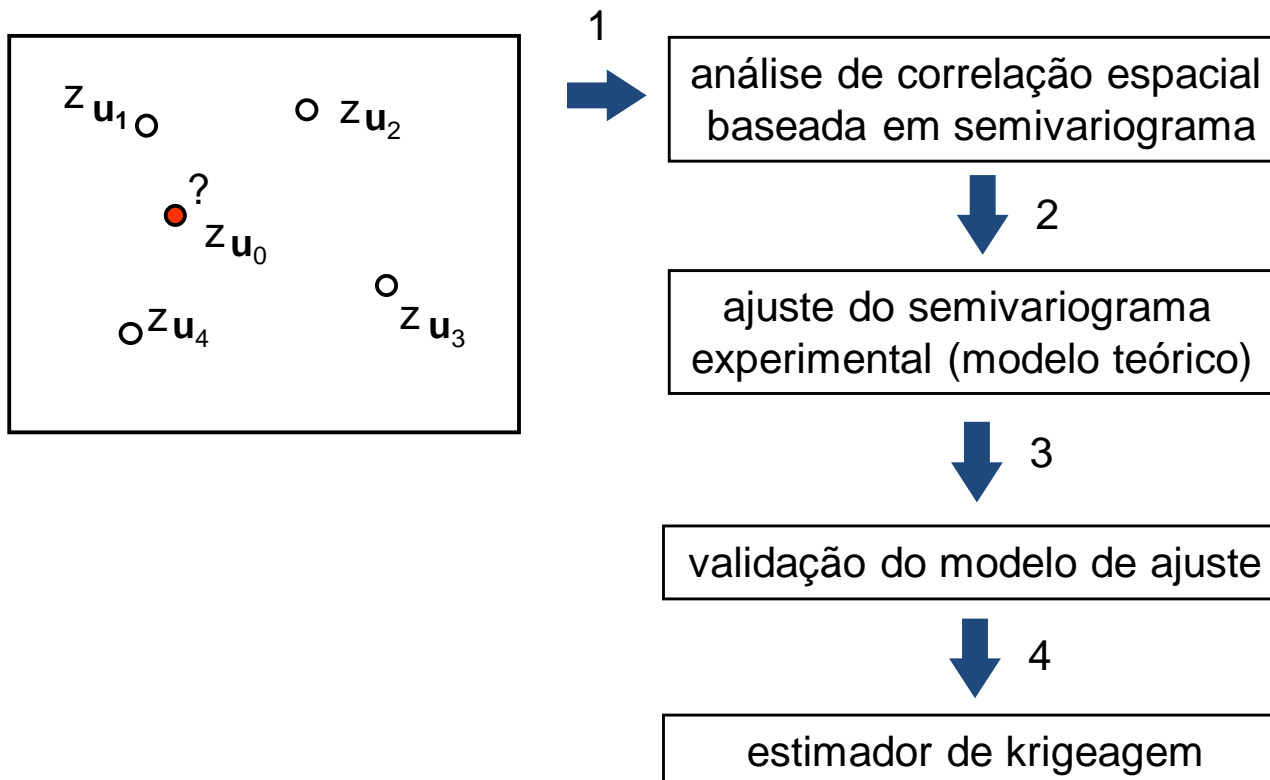
Os pesos são calculados considerando a estrutura de correlação espacial imposta pelo semivariograma



Os pesos são calculados considerando a estrutura de correlação espacial imposta pelo semivariograma



Os pesos são calculados considerando a estrutura de correlação espacial imposta pelo semivariograma



Segundo *Journal* (1988):  $\mathbf{K}\cdot\lambda = \mathbf{k} \Rightarrow \lambda = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{k}$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{n0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Segundo *Journal* (1988):  $\mathbf{K}\cdot\lambda = \mathbf{k} \Rightarrow \lambda = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{k}$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{n0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os elementos das matrizes de covariâncias são calculados da seguinte forma (*Journal*, 1988):

$$C_{ij} = C(\mathbf{0}) - \gamma(\mathbf{h}) = C_0 + C_1 - \gamma(\mathbf{h})$$

Segundo *Journal* (1988):  $\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{k} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{k}$

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \alpha \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \end{array} \end{array}^{-1} \begin{array}{c} C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{n0} \\ 1 \end{array}$$

Os elementos das matrizes de covariâncias são calculados da seguinte forma (*Journal*, 1988):

$$C_{ij} = C(\mathbf{0}) - \gamma(\mathbf{h}) = C_0 + C_1 - \gamma(\mathbf{h})$$

Substituindo os valores de  $C_{ij}$  nas matrizes encontram-se os pesos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , e  $\lambda_n$ .

Segundo *Journal* (1988):  $\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{k} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{k}$

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \alpha \end{array} = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{array} \right]^{-1} \begin{array}{c} C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{n0} \\ 1 \end{array} \end{array}$$

Os elementos das matrizes de covariâncias são calculados da seguinte forma (*Journal*, 1988):

$$C_{ij} = C(\mathbf{0}) - \gamma(\mathbf{h}) = C_0 + C_1 - \gamma(\mathbf{h})$$

Substituindo os valores de  $C_{ij}$  nas matrizes encontram-se os pesos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , e  $\lambda_n$ .

Estimador de Krigeagem (*Journal*, 1988):  $Z_{\mathbf{x}_0}^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{x}_i)$

Segundo *Journal* (1988):  $\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{k} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{k}$

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \alpha \end{array} = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right]^{-1} \begin{array}{c} C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{n0} \\ 1 \end{array} \end{array}$$

Os elementos das matrizes de covariâncias são calculados da seguinte forma (*Journal*, 1988):

$$C_{ij} = C(\mathbf{0}) - \gamma(\mathbf{h}) = C_0 + C_1 - \gamma(\mathbf{h})$$

Substituindo os valores de  $C_{ij}$  nas matrizes encontram-se os pesos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , e  $\lambda_n$ .

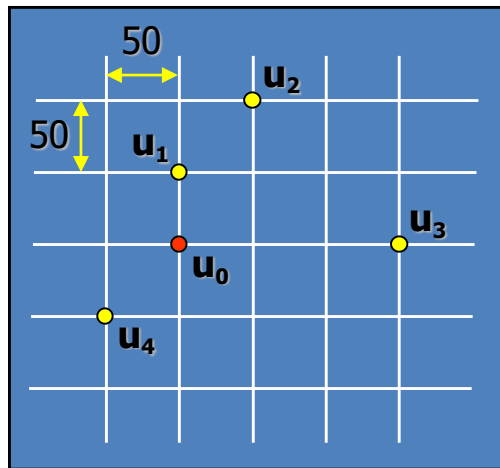
Estimador de Krigeagem (*Journal*, 1988):  $Z_{\mathbf{x}_0}^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{x}_i)$

Variância de Krigeagem (*Journal*, 1988):  $\sigma_{k_0}^2 = (C_0 + C_1) - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{k}$



## EXEMPLO

Considere o espaço amostral na figura abaixo. Deseja-se estimar o valor da variável  $Z$  no ponto  $u_0$ , a partir de  $z(u_1)$ ,  $z(u_2)$ ,  $z(u_3)$  e  $z(u_4)$ . Considere ainda, que o semivariograma empírico foi ajustado através de um modelo esférico, com  $a = 200$ ,  $C_1 = 20$ , e  $C_0 = 2$ .



krigeagem ordinária

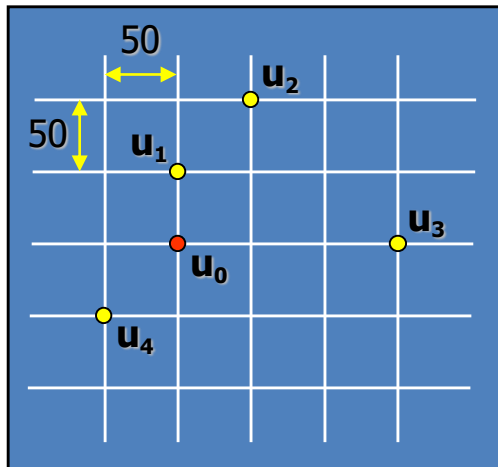
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 1 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & 1 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{01} \\ C_{02} \\ C_{03} \\ C_{04} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os elementos das matrizes são calculados:  $C_{ij} = C_0 + C_1 - \gamma(\mathbf{h})$  Modelo Teórico

$$C_{12} = C_{21} = C_{04} = C_0 + C_1 - \gamma(50\sqrt{2})$$

$$= (2+20) - \left[ 2 + 20 \left( 1,5 \frac{50\sqrt{2}}{200} - 0,5 \frac{(50\sqrt{2})^3}{(200)^3} \right) \right] = 9,84$$

## EXEMPLO



$$C_{13} = C_{31} = (C_0 + C_1) - \gamma [ \sqrt{(150)^2 + (50)^2} ] = 1,23$$

$$C_{14} = C_{41} = C_{02} = (C_0 + C_1) - \gamma [ \sqrt{(100)^2 + (50)^2} ] = 4,98$$

$$C_{23} = C_{32} = (C_0 + C_1) - \gamma [ \sqrt{(100)^2 + (100)^2} ] = 2,33$$

$$C_{24} = C_{42} = (C_0 + C_1) - \gamma [ \sqrt{(100)^2 + (150)^2} ] = 0,29$$

$$C_{34} = C_{43} = (C_0 + C_1) - \gamma [ \sqrt{(200)^2 + (50)^2} ] = 0$$

$$C_{01} = (C_0 + C_1) - \gamma (50) = 12,66$$

$$C_{03} = (C_0 + C_1) - \gamma (150) = 1,72$$

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{44} = (C_0 + C_1) - \gamma (\mathbf{0}) = 22$$

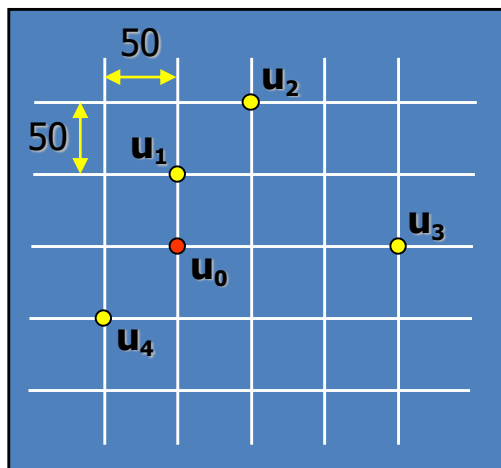
## EXEMPLO

Substituindo os valores de  $C_{ij}$  nas matrizes, encontra-se os seguintes pesos:

$$\lambda_1 = 0,518 \quad \lambda_2 = 0,022 \quad \lambda_3 = 0,089 \quad \lambda_4 = 0,371$$

Finalmente o valor estimado é dado por:

$$\hat{Z}(\mathbf{u}_0) = 0,518 z(\mathbf{u}_1) + 0,022 z(\mathbf{u}_2) + 0,089 z(\mathbf{u}_3) + 0,371 z(\mathbf{u}_4)$$



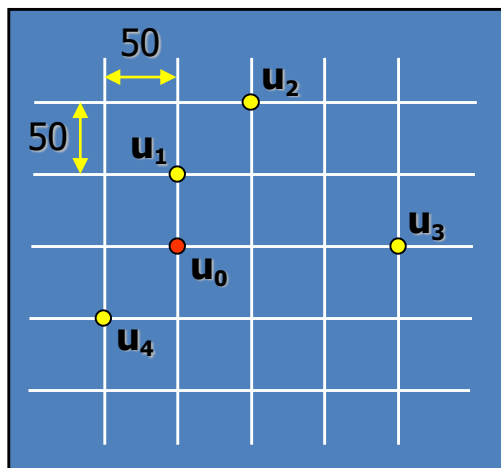
## EXEMPLO

Substituindo os valores de  $C_{ij}$  nas matrizes, encontra-se os seguintes pesos:

$$\lambda_1 = 0,518 \quad \lambda_2 = 0,022 \quad \lambda_3 = 0,089 \quad \lambda_4 = 0,371$$

Finalmente o valor estimado é dado por:

$$\hat{Z}(\mathbf{u}_0) = 0,518 z(\mathbf{u}_1) + 0,022 z(\mathbf{u}_2) + 0,089 z(\mathbf{u}_3) + 0,371 z(\mathbf{u}_4)$$



**COMENTÁRIO:** embora as amostras  $Z_2$  e  $Z_3$  tenham pouca influência na estimativa final de  $Z_0$ , suas influências não são lineares em relação às suas distâncias a partir de  $Z_0$ . A amostra  $Z_3$  está mais distante que  $Z_2$ ; no entanto, tem mais influência, 8,9%, que  $Z_2$ , 2,2%. Isto ocorre porque  $Z_0$  está diretamente sobre a influência de  $Z_3$ , enquanto  $Z_2$  está muito próximo de  $Z_1$ . Ao se introduzir as covariâncias no cálculo dos pesos, evita-se associar pesos indevidos a “clusters” (agrupamentos) de amostras, o que não ocorre com outros métodos baseados somente na distância.

