



Ministério da  
**Ciência e Tecnologia**



aa/bb/cc/dd-TDI

## DIAGRAMA DO VIZINHO MAIS RÁPIDO

Maurício Carvalho Mathias de Paulo

Monografia relativa à disciplina de Introdução aos Sensores Remotos, ministrada pelo Dr. José Carlos Neves Epiphanyo, apresentada em 02 de junho de 2011.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/xx/yy>>

INPE

São José dos Campos

2011

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6923/6921

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: [pubtc@sid.inpe.br](mailto:pubtc@sid.inpe.br)

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):****Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

**Membros:**

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr<sup>a</sup> Regina Célia dos Santos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr. Horácio Hideki Yanasse - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Vivéca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
**Ciência e Tecnologia**



aa/bb/cc/dd-TDI

## DIAGRAMA DO VIZINHO MAIS RÁPIDO

Maurício Carvalho Mathias de Paulo

Monografia relativa à disciplina de Introdução aos Sensores Remotos, ministrada pelo Dr. José Carlos Neves Epiphanyo, apresentada em 02 de junho de 2011.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/xx/yy>>

INPE

São José dos Campos

2011

# QUICKEST NEIGHBOR DIAGRAM

## ABSTRACT

The Voronoi diagram is a geometric technique for dividing space among a set of points. There are some extensions of the original diagram that include points' attributes in the space division process. These are known as weighted Voronoi diagrams. This work presents the theory and a few applications of two weighting functions (additive and multiplicative), that leads to an overview on how these methods can be applied to solve geographic information problems. An application on defense is outlined as a proof of concept of the multiplicatively weighted Voronoi diagram interpreted as the quickest neighbor diagram.

## 1 Introdução

O diagrama de Voronoi representa uma técnica versátil utilizada ostensivamente para dividir o espaço entre um conjunto de pontos definindo regiões de influência para cada um. Em sua concepção inicial, o diagrama divide o espaço de forma que cada polígono represente a região onde aquele ponto é o vizinho mais próximo (AURENHAMMER; KLEIN, 2000).

Como extensão deste diagrama, podem ser definidas outras funções de distância que utilizem as propriedades dos fenômenos representados pelos pontos além das características geométricas (BOOTS, 1986). Este tipo de diagrama é chamado de diagrama de Voronoi ponderado. Desta forma, as regiões de influência possuem propriedades diferentes do diagrama original. Algumas das aplicações encontradas na literatura são apresentadas no escopo do trabalho para exemplificar como divisões espaciais ponderadas podem ser utilizadas para resolver problemas geoespaciais.

A técnica de ponderação define diretamente o modelo que o diagrama irá representar, portanto são apresentadas as teorias que viabilizam a construção de alguns tipos de diagramas de Voronoi ponderados. Como exemplo da interpretação do Diagrama de Voronoi Multiplicativamente Ponderado como diagrama do vizinho mais rápido é apresentada uma nova proposta de aplicação à logística para situações de emergência como busca e salvamento e defesa do território nacional.

As aplicações geográficas destes diagramas receberam impulso pelas pesquisas nas técnicas de geração de diagramas de Voronoi ponderados. Por exemplo, implementações de aproximações para calcular o diagrama de Voronoi multiplicativamente (DONG, 2008) e aditivamente (ANTON et al., 1998) ponderados tornaram possíveis a

implementação em aplicativos de Sistemas de Informações Geográficas. Desta forma, foi viabilizada a exploração destes diagramas em sistemas de fácil utilização por pesquisadores voltados à solução de problemas espaciais.

## 2 Geometria dos Diagramas de Voronoi Ponderados

### 2.1 Diagrama de Voronoi Ordinário

Dado um conjunto de pontos geradores  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , o diagrama de Voronoi gerado à partir dele representa as regiões do plano onde os pontos nelas contidos estão mais próximos do ponto gerador daquela região do que de qualquer outro, conforme formalizado na equação 2.1 (BOOTS, 1986). Desta forma, a cada ponto do conjunto é atribuída uma área na qual ele é o vizinho mais próximo (AURENHAMMER; KLEIN, 2000).

A borda de cada área é definida encontrando os pontos  $x$  onde as distâncias a cada um dos dois geradores são iguais (equação 2.1). Portanto as fronteiras de cada área de influência são retas que representam onde termina a influência de um gerador e começa a de outro. A figura 2.1 exibe um exemplo de diagrama de Voronoi ordinário aplicado a um conjunto de pontos geradores.

$$P_i = x | d(x, p_i) \leq d(x, p_j); j \in S, j \neq i \quad (2.1)$$

Como extensão, um diagrama de Voronoi ponderado pode ser definido analogamente, apenas trocando a distância euclidiana  $d(x, p_i)$  pela distância ponderada  $d_w(x, p_i)$  (AURENHAMMER; EDELSBRUNNER, 1984). A equação 2.2 mostra a definição da região de influência  $WP_i$  de cada gerador (BOOTS, 1986). Em aplicações geográficas o peso deve ser uma propriedade do fenômeno mapeado pelo ponto  $p_i$ , que será levada em consideração na divisão espacial (BOOTS, 1986).

$$WP_i = x | d_w(x, p_i) \leq d_w(x, p_j); j \in S, j \neq i \quad (2.2)$$

Existem diversas definições de diagramas de Voronoi ponderados. Cada método de ponderação possui aplicações distintas nas quais são utilizados para modelar o comportamento espacial do fenômeno estudado. Nos itens 2.2 e 2.3 são apresentados duas das técnicas mais comuns de ponderação do diagrama de Voronoi.

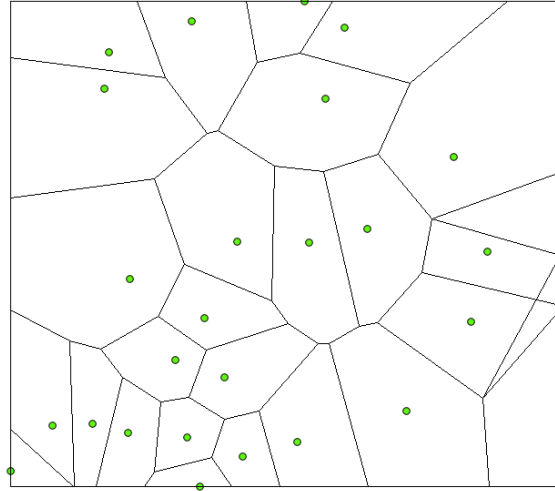


Figura 2.1 - Diagrama de Voronoi Ordinário aplicado a um conjunto de pontos

## 2.2 Diagrama de Voronoi Aditivamente Ponderado

Definindo-se a função de distância como a soma do peso  $w_i$  à distância euclidiana (equação 2.3) pode-se definir o Diagrama de Voronoi Aditivamente Ponderado (*Additively Weighted Voronoi Diagram - AWVD*).

$$d(x, p_i) = |x - p_i| + w_i \quad (2.3)$$

A equação 2.4 descreve as fronteiras das regiões de influência. Como a diferença entre as distâncias é igual à constante  $w_2 - w_1$  nota-se que a equação define trechos de hipérbolas nas quais o valor dos pesos determina diretamente a diferença entre as distâncias nas fronteiras (ANTON et al., 1998). Portanto a unidade mais indicada para inserir os pesos é a mesma unidade do sistema de coordenadas em questão. Neste diagrama o peso pode ser interpretado como o raio mínimo de influência de cada vértice gerador (BOOTS, 1986).

$$d(x, p_1) = d(x, p_2) \rightarrow |x - p_1| - |x - p_2| = w_2 - w_1 (\text{Constante}) \quad (2.4)$$

## 2.3 Diagrama de Voronoi Multiplicativamente Ponderado

Definindo a função de distância como a divisão da distância euclidiana pelo peso (equação 2.5) pode-se obter o Diagrama de Voronoi Multiplicativamente Ponderado

(*Multiplicatively Weighted Voronoi Diagram - MWVD*).

$$d(x, p_i) = \frac{|x - p_i|}{w_i} \quad (2.5)$$

Neste diagrama as fronteiras entre as áreas de influência em um *MWVD* são trechos de círculos de Apolônio onde a razão das distâncias aos dois pontos geradores é constante e igual a razão dos seus pesos (AURENHAMMER; EDELSBRUNNER, 1984).

$$d(x, p_1) = d(x, p_2) \rightarrow \frac{|x - p_1|}{|x - p_2|} = \frac{w_1}{w_2} \quad (2.6)$$

Como os pesos definem as razões das distâncias a razão é adimensional, portanto o parâmetro utilizado como peso pode estar em qualquer unidade de medida. Em aplicações práticas, esta invariância quanto à unidade de medida do peso é útil quando o peso representa grandezas mensuráveis, porém não métricas.

Pode-se interpretar este diagrama como atribuição ponderada de espaço, onde geradores com maiores pesos receberão maiores áreas ou como modelo de crescimento, no qual as áreas crescem a taxas diferentes, partindo dos geradores (BOOTS, 1986). A figura 2.2 apresenta o diagrama de Voronoi multiplicativamente ponderado aplicado ao mesmo conjunto de pontos da figura 2.1.

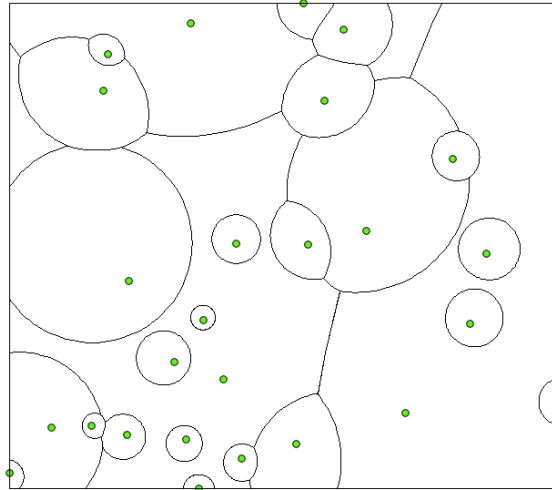


Figura 2.2 - Diagrama de Voronoi multiplicativamente ponderado aplicado a um conjunto de pontos

### 3 Aplicações

Para exemplificar as diferenças práticas e conceituais entre as técnicas de ponderação do diagrama de Voronoi são apresentadas neste item algumas aplicações e como cada autor definiu o atributo de ponderação.

#### 3.1 Caminho Sequencial Ótimo

Um caminho sequencial é uma das possíveis formas de visitar uma sequência de lugares na qual apenas o tipo de lugar importa. Por exemplo, primeiro ir ao cinema, depois ao restaurante e por fim ao posto de gasolina. O caminho sequencial ótimo (*Optimum Sequenced Route - OSR*) é o melhor caminho encontrado para visitar os lugares de cada classe, na dada sequência, a partir de um ponto  $q$ , conhecendo todos os lugares daquelas classes na região de estudo (SHARIFZADEH; SHAHABI, 2008).

Ao definir as localidades da primeira classe a visitar como pontos geradores e os pesos como o comprimento do caminho sequencial ótimo que seria obtido partindo de cada uma delas, encontra-se um diagrama de Voronoi Aditivamente ponderado (SHARIFZADEH; SHAHABI, 2008). A propriedade deste diagrama é que todos os pontos dentro da região de influência de um gerador tem seus caminhos ótimos definidos como a distância até o gerador mais o caminho ótimo a partir dele (SHARIFZADEH; SHAHABI, 2008).

Seja uma sequência  $R$  de classes de lugares a visitar partindo de um ponto  $p$ . Conhecendo-se os pontos  $p_1$  que representam as localidades da primeira classe a visitar, a função de distância utilizada para encontrar o caminho sequencial ótimo está representada na equação 3.1 (SHARIFZADEH; SHAHABI, 2008).

$$d_{osr}(q, R) = |q - p_1| + d_{osr}(p_1, R)_{constante} \quad (3.1)$$

Portanto, dada uma sequência de tipos de localidades a visitar, é possível preparar um diagrama que indicará para todo o espaço em estudo, qual é o caminho ótimo a seguir de cada ponto nele contido.

#### 3.2 Avaliação da alocação de espaço para centros educacionais

Em um estudo conduzido para avaliar a alocação de espaço para crianças em centros educacionais, foram comparadas as áreas estimadas para os centros educacionais utilizando os diagramas de Voronoi ordinário e multiplicativamente ponderado (KARIMI et al., 2009). O fator de ponderação utilizado foi a razão entre a capacidade estimada



do centro educacional e a população atendida atualmente nele.

$$d_w(x, p_i) = \frac{d_e(x, p_i)}{n_{estimado}/n_{atual}} \quad (3.2)$$

A razão entre as áreas dos dois diagramas permite avaliar os resultados da divisão entre os centros educacionais. Caso um centro educacional apareça com área ponderada maior, significa que ele está próximo a outro centro que está relativamente mais sobrecarregado. Caso a área ponderada seja menor, há indícios de que o centro está sobrecarregado perto dos seus vizinhos.

### 3.3 Ajustamento de distritos para logística

Em logística, pode-se utilizar a divisão em distritos para definir zonas de entrega. Estas zonas são regiões ao redor dos pontos de onde partem os entregadores, definindo um percurso que termina de volta ao ponto gerador daquela zona (GALVÃO et al., 2006). O tempo médio de percurso pode ser aproximado pelo tamanho da área que um ponto gerador deve cobrir (LANGEVIN; SOUMIS, 1989). Utilizando essa aproximação, é possível encontrar uma combinação de pesos que gerem um diagrama de Voronoi multiplicativamente ponderado que minimiza o tempo médio de percurso na distribuição distrital (GALVÃO et al., 2006).

### 3.4 Divisão espacial entre hospitais gerais do Rio de Janeiro

Foi feita a comparação da divisão espacial da área do município do Rio de Janeiro aplicando diagramas de Voronoi ordinário e multiplicativamente ponderado à 21 unidades de hospital geral (REZENDE et al., 2000). O fator de ponderação utilizado foi baseado no número de internações estimadas para cada hospital. Novamente, a diferença entre as divisões espaciais indicou localizações onde há irregularidades de distribuição. Neste estudo foram encontradas regiões de influência descontínuas. Esta é uma característica do diagrama de Voronoi multiplicativamente ponderado (AURENHAMMER; EDELSBRUNNER, 1984) que pode indicar que a aplicação da técnica não retrata o fenômeno conforme o esperado.

$$d_w(x, p_i) = \frac{d_e(x, p_i)}{n_{internacoes}} \quad (3.3)$$

### 3.5 Diagrama do Vizinho mais Rápido

Uma das propriedades diretas do diagrama de Voronoi multiplicativamente ponderado é a relação com a velocidade (equação 3.4). Caso o atributo escolhido seja a velocidade de deslocamento de cada ponto, o diagrama mostra as regiões em que aquele ponto gerador será sempre o primeiro a chegar. Este conceito pode ser aplicado à situações de busca e salvamento e respostas à conflitos.

$$d_w(x, p_i) = \frac{d_e(x, p_i)}{v_{transporte}} = t_{deslocamento} \quad (3.4)$$

Por exemplo, dada uma distribuição espacial de pelotões militares com diferentes tipos de transporte (a pé, motorizado e helicópteros). Cada pelotão se move na velocidade média do transporte utilizado por aquele pelotão. No caso da ocorrência de um conflito ou a necessidade de resgate em um determinado ponto, precisa-se saber qual pelotão tem condições de alcançar aquela coordenada mais rápido.

Considerando o tempo de deslocamento ( $t_{deslocamento}$ ) de cada pelotão função apenas da distância ( $d_e(x, p_i)$ ) a percorrer até o ponto e da sua velocidade ( $v_{transporte}$ ) (equação 3.4), pode-se definir um diagrama de Voronoi multiplicativamente ponderado no qual para cada pelotão é apresentada a região de influência onde ele é o mais rápido para alcançar aquelas coordenadas. Nesta aplicação o peso é a velocidade de cada pelotão.

## 4 Conclusão

As técnicas apresentadas neste trabalho permitem dividir o espaço entre um conjunto de pontos. O objetivo principal da ponderação é adicionar à divisão espacial um segundo fator, baseado em uma propriedade do fenômeno mapeado pelos pontos (BOOTS, 1986). Quando o diagrama é ponderado somando os pesos às distâncias, o atributo deve estar representando uma grandeza geométrica, como é o caso do estudo descrito no item 3.1.

Das aplicações apresentadas nos itens 3.2, 3.3 e 3.4, nota-se a variedade de situações que o diagrama de Voronoi multiplicativamente ponderado pode ser aplicado. Essa capacidade vem do fato das distâncias serem razões entre os pesos, portanto o peso pode estar em qualquer unidade e não precisa ser uma grandeza métrica.

No item 3.5 foi apresentada uma interpretação diferente do tradicional, onde o diagrama mostra os vizinhos que alcançam mais rápido os pontos do espaço. Esta

interpretação tem aplicações imediatas em situações de busca e salvamento e defesa do território.

De todas as aplicações dos diagramas nota-se que a escolha dos pesos é fator fundamental para o sucesso da utilização do diagrama. Escolher uma grandeza que não se comporta como o modelado pelo diagrama pode acarretar em problemas como os encontrados no item 3.2 (REZENDE et al., 2000). É comum que o analista tenha que verificar seus resultados e procure pesos mais adequados, conforme foi explorado intensivamente na aplicação à logística de transportes (GALVÃO et al., 2006).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, F.; MIOC, D.; GOLD, C. Dynamic additively weighted voronoi diagrams made easy. In: **CCCG**. [S.l.: s.n.], 1998. 1, 3

AURENHAMMER, F.; EDELSBRUNNER, H. An optimal algorithm for constructing the weighted Voronoi diagram in the plane. **Pattern Recognition**, Elsevier, v. 17, n. 2, p. 251–257, 1984. ISSN 0031-3203. 2, 4, 6

AURENHAMMER, F.; KLEIN, R. Handbook of Computational Geometry, chapter Voronoi Diagrams. **Elsevier**, v. 169, p. 170, 2000. 1, 2

BOOTS, B. **Voronoi (Thiessen) Polygons**. [S.l.]: Geo Books, 1986. 1, 2, 3, 4, 7

DONG, P. Generating and updating multiplicatively weighted Voronoi diagrams for point, line and polygon features in GIS. **Computers & Geosciences**, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 411–421, 2008. ISSN 0098-3004. 1

GALVÃO, L.; NOVAES, A.; Souza de Cursi, J.; SOUZA, J. A multiplicatively-weighted voronoi diagram approach to logistics districting. **Computers & operations research**, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 93–114, 2006. 6, 8

KARIMI, F.; DELAVAR, M. R.; MOSTAFAVI, M. A. Space allocation of educational centers using multiplicatively weighted voronoi diagram. **WG II/2, II/3, II/4: Workshop on Quality, Scale & Analysis Aspects of City Models**, 2009. 5

LANGEVIN, A.; SOUMIS, F. Design of multiple-vehicle delivery tours satisfying time constraints. **Transportation Research Part B: Methodological**, Elsevier, v. 23, n. 2, p. 123–138, 1989. 6

REZENDE, F.; ALMEIDA, R.; NOBRE, F. Diagramas de Voronoi para a definição de áreas de abrangência de hospitais públicos no Município do Rio de Janeiro. **Cadernos de Saúde Pública**, SciELO Public Health, v. 16, n. 2, p. 467–475, 2000. ISSN 0102-311X. 6, 8

SHARIFZADEH, M.; SHAHABI, C. Processing optimal sequenced route queries using voronoi diagrams. **Geoinformatica**, Springer, v. 12, n. 4, p. 411–433, 2008. 5