

## CAPÍTULO 5 - LINGUAGENS SENSÍVEIS AO CONTEXTO

Toda gramática sem regras que diminuam o comprimento das suas formas sentenciais pode ser colocada na forma de uma gramática sensível ao contexto. Pode-se assumir também que todas as regras que contêm terminais sejam da forma

$$A \rightarrow a \quad A \in N; a \in \Sigma.$$

definição 5.1: uma GSC  $G$  é de ordem  $\underline{n}$   $\Leftrightarrow$  não há produção em  $G$  cujo lado direito tem comprimento maior do que  $\underline{n}$ .

Lema 5.1: Para toda GSC,  $G$ , de ordem  $n \geq 3$ , existe uma GSC,  $G'$  de ordem  $(n-1)$  tal que  $L(G') = L(G)$ .

Prova.

Seja  $\alpha \rightarrow \beta$  uma produção de  $G$ .

Se  $|\beta| < 3$ , então  $\alpha \rightarrow \beta \in G'$

Caso contrário, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\alpha &= A\alpha' \\ \beta &= BCD\beta'\end{aligned}$$

onde  $\alpha'$  e  $\beta'$  podem eventualmente ser  $\Lambda$ , e  $A, B, C, D \in N$

Se  $\alpha' = \Lambda$ , então

$$A \rightarrow A_1 A_2$$

$$A_1 \rightarrow BC$$

$$A_2 \rightarrow D\beta'$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são dois novos não terminais

essas produções (todas de comprimento menor que  $\alpha \rightarrow \beta$ ) simulam a produção  $\alpha \rightarrow \beta$ .

Se  $\alpha' \neq \Lambda$ , então pode-se escrever:

$$\alpha' = E\alpha'' \quad ; \quad E \in N \quad \text{e portanto} \quad AE\alpha'' \rightarrow BCD\beta' \in G$$

Essa produção pode ser simulada por:

$$AE \rightarrow A_1 A_2$$

$$A_1 \rightarrow B$$

$$A_2 \alpha'' \rightarrow CD\beta'$$

Logo, todas as produções em  $G'$  são mais curtas que as de  $G$ .

Corolário 5.1: Toda GSC é equivalente a uma outra GSC de ordem 2.

definição 5.2: uma GSC preserva o comprimento  $\Leftrightarrow$  para toda produção  $\alpha \rightarrow \beta$

(a)  $\alpha = S$  ou

(b)  $\beta$  não contém  $S$  e  $|\alpha| = |\beta|$

Pelo corolário 5.1, as produções de uma GSC que preserva o comprimento são da forma:

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow AB & A, B \in N \\ C \rightarrow D & D \in N \cup \Sigma \\ EF \rightarrow GH & E, F, G, H \in N \end{array}$$

definição 5.3: uma gramática  $G'$  é limitada linearmente  $\Leftrightarrow$   $G$  é de ordem 2, preserva o comprimento e se  $S \rightarrow AB \in G$  então  $A = S$ .

Lema 5.2: Para toda GSC,  $G$ , de ordem 2, existe uma gramática limitada linearmente  $G'$  tal que  $L(G') = L(G)$ .

Prova: Seja  $G = (N, \Sigma, P, S)$ .  
Construir  $G' = (N', \Sigma, P', S')$  tal que:

$$N' = N \cup \{S', Q\} \quad S', Q \notin N$$

e  $P'$  dado por:

$$(a) \quad S' \rightarrow S'Q$$

$$(b) \quad S' \rightarrow S$$

$$(c) \quad QA \rightarrow AQ$$

$$AQ \rightarrow QA$$

para todo  $A \in N \cup \Sigma$

$$(d) \quad A \rightarrow B \quad \text{se} \quad A \rightarrow B \in P$$

$$AB \rightarrow CD \quad \text{se} \quad AB \rightarrow CD \in P$$

$$AQ \rightarrow BC \quad \text{se} \quad A \rightarrow BC \in P$$

EXEMPLO:  $G$ :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow SA \\ S &\rightarrow CB \\ B &\rightarrow CA \\ A &\rightarrow C \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \\ C &\rightarrow c \end{aligned}$$

$G'$ :

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S'Q \\ S' &\rightarrow S \\ SQ &\rightarrow SA \\ SQ &\rightarrow CB \\ BQ &\rightarrow CA \\ A &\rightarrow C \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \\ C &\rightarrow c \end{aligned}$$

e todas as produções da forma  $\alpha Q \rightarrow Q\alpha$ ;  $\alpha \in \text{NuZ}$ .

Numa gramática limitada linearmente, a única produção que aumenta o comprimento é  $S' \rightarrow S'Q$ . Essa produção é usada até obter o comprimento da cadeia que se quer gerar.

Seja a cadeia ccca.

Em  $G$ :  $S \Rightarrow SA \Rightarrow CBA \Rightarrow CCAA \Rightarrow CCCA \xRightarrow{4} ccca$

↑

até esse ponto o comprimento aumentou

Em  $G'$ :  $S' \Rightarrow S'Q \Rightarrow S'QQ \Rightarrow S'QQQ$

(obtemos o comprimento desejado. Agora deve-se obter CCAA, a partir do qual as derivações em  $G$  e  $G'$  são iguais)

$\Rightarrow SQQQ \Rightarrow SAQQ \Rightarrow SQAQ \Rightarrow CBAQ$   
 $\Rightarrow CBQA \Rightarrow CCAA$

Corolário 5.2. Para toda GSC,  $G$ , existe gramática limitada linearmente  $G'$  tal que  $L(G') = L(G)$ .

Prova. Consequência do corolário 5.1 e lema 5.2.

definição 5.4: Seja  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$  uma máquina de Turing tal que:

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\$, \#\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow\}^2)$$

onde:

(a) uma configuração de  $M$  é dada por  $(q, \hat{x}, \hat{y}) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$  onde " $\hat{\phantom{x}}$ " indica a posição das cabeças de leitura e de escrita de  $M$ .

(b)  $x \in \Sigma^*$  é aceita por  $M \Leftrightarrow (q_0, \hat{x}, \hat{b}) \vdash^* (p, \hat{x}, \hat{y}, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$  com  $p \in F$ ;  $y \in \Gamma$ ;  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^*$

(c) existe  $k$  tal que

$$\text{se } (q_0, \hat{x}, \hat{b}) \vdash^* (p, \hat{x}, \hat{y}, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2), \text{ então } |\gamma_1, \gamma_2| \leq k|x|$$

Então  $M$  é denominado AUTÔMATO LIMITADO LINEARMENTE.

Teorema 5.1. Para toda GSC  $G$ , existe um autômato limitado linearmente  $M$  tal que  $L(G) = L(M)$ .

Prova. Pelo corolário 5.2, seja  $G$  uma gramática limitada linearmente

$$K, G = (N, T, P, S).$$

Construir  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$  tal que:

$$\Sigma = N \cup T; \quad \Gamma = \Sigma \cup \{b\} \cup \{\$, \#\}$$

$$Q = \{q_0, q_1, \Delta_0, \Delta_1, r_0, r_1 \text{ e } \Delta_A \text{ para todo } A \text{ tal que } AB \rightarrow CD \in P\}$$

$$F = \{q_0\}$$

e com as seguintes transições:

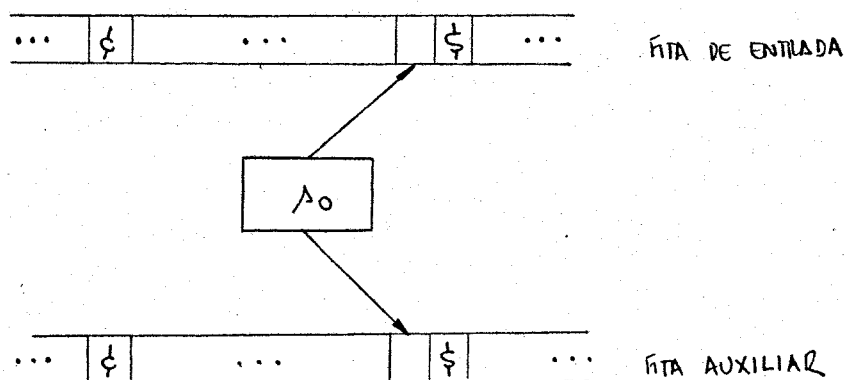
Estágio 1: copiar a entrada numa fita auxiliar

$$(q_0, \$, b) \vdash (q_1, \$, \rightarrow, \rightarrow)$$

$$(q_1, a, b) \vdash (q_1, a, \rightarrow, \rightarrow); \quad a \in T$$

$$(q_1, \$, b) \vdash (\Delta_0, \$, \leftarrow, \leftarrow)$$

Após o estágio 1,  $M$  estará na seguinte configuração:



ESTÁGIO 2: toda a computação é feita na fita auxiliar (a cabeça da fita de entrada apenas acompanha os movimentos)

$$(\lambda_0, A) \vdash (\lambda_0, A, \rightarrow)$$

$$(\lambda_0, A) \vdash (\lambda_0, A, \leftarrow)$$

para todo  $A \in N \cup T$ ,  $A \neq \epsilon, \$$   
(a cabeça pode mover-se livremente, no estado  $\lambda_0$ , dentro dos marcadores)

$$(\lambda_0, B) \vdash (\lambda_0, A, \downarrow)$$

para toda produção  $A \rightarrow B \in P$ .

$$(\lambda_0, C) \vdash (\lambda_A, A, \rightarrow)$$

$$(\lambda_A, D) \vdash (\lambda_0, B, \downarrow)$$

para toda produção  $AB \rightarrow CD \in P$

$$(\lambda_0, S) \vdash (r_0, S, \leftarrow)$$

$$(r_0, \epsilon) \vdash (r_1, \epsilon, \rightarrow)$$

$$(r_1, S) \vdash (\lambda_1, \epsilon, \rightarrow)$$

se existe na fita  $\dots \epsilon SA \dots$  é porque foi usada uma produção do tipo  $S \rightarrow SA$ . Portanto  $SA$  deve ser substituído por  $S$  (notar que o autômato efetua uma análise "bottom-up"), ou seja, deve ficar na fita  $\dots \epsilon \epsilon S \dots$

e para todo  $S \rightarrow SA \in P$ :

$$(\lambda_1, A) \vdash (\lambda_0, S, \downarrow)$$

$$(\lambda_1, \epsilon) \vdash (q_0, \epsilon, \downarrow)$$

último movimento

$$(x, X) \vdash (x, X, \downarrow)$$

para todos os demais pares  $(x, X)$ .

Exemplo: Seja a gramática limitada linearmente:

$$S \rightarrow SA$$

$$BC \rightarrow CA$$

$$A \rightarrow a$$

$$S \rightarrow SB$$

$$A \rightarrow C$$

$$B \rightarrow b$$

$$S \rightarrow C$$

$$C \rightarrow c$$

Estágio 2 do autômato limitado linearmente:

$$(\Lambda_0, X) \vdash (\Lambda_0, X, \rightarrow)$$

$$(\Lambda_0, X) \vdash (\Lambda_0, X, \leftarrow)$$

para todo

$$X \in \{S, A, B, C, a, b, c\}$$

$$(\Lambda_0, C) \vdash (\Lambda_0, S, \downarrow)$$

$$(\Lambda_0, C) \vdash (\Lambda_0, A, \downarrow)$$

$$(\Lambda_0, a) \vdash (\Lambda_0, A, \downarrow)$$

$$(\Lambda_0, b) \vdash (\Lambda_0, B, \downarrow)$$

$$(\Lambda_0, c) \vdash (\Lambda_0, C, \downarrow)$$

$$(\Lambda_0, C) \vdash (\Lambda_B, B, \rightarrow)$$

$$(\Lambda_B, A) \vdash (\Lambda_0, C, \downarrow)$$

$$(\Lambda_0, S) \vdash (r_0, S, \leftarrow)$$

$$(r_0, \xi) \vdash (r_1, \xi, \rightarrow)$$

$$(r_1, S) \vdash (\Lambda_1, \xi, \rightarrow)$$

$$(\Lambda_1, A) \vdash (\Lambda_0, S, \downarrow)$$

$$(\Lambda_1, B) \vdash (\Lambda_0, S, \downarrow)$$

$$(\Lambda_1, \xi) \vdash (q_0, \xi, \downarrow)$$



Seja, por exemplo, a cadeia: cbca

Essa cadeia pode ser gerada por:

$$S \Rightarrow SA \Rightarrow SBA \Rightarrow SBBA \Rightarrow SBBC \Rightarrow SBCA \Rightarrow CBCA \xRightarrow{4} cbca$$

O reconhecimento dessa cadeia, pelo autômato limitado linearmente será:

$$\begin{aligned} & (\Delta_0, \hat{\$}cbca\hat{\$}) \vdash^* (\Delta_0, \hat{\$}C\hat{B}C\hat{A}\hat{\$}) \vdash (\Delta_0, \hat{\$}\hat{S}B\hat{C}\hat{A}\hat{\$}) \vdash^* \\ & \vdash^* (\Delta_0, \hat{\$}S\hat{B}\hat{C}\hat{A}\hat{\$}) \vdash (\Delta_B, \hat{\$}S\hat{B}\hat{B}\hat{A}\hat{\$}) \vdash (\Delta_0, \hat{\$}S\hat{B}\hat{B}\hat{C}\hat{\$}) \vdash \\ & \vdash (\Delta_0, \hat{\$}S\hat{B}\hat{B}\hat{A}\hat{\$}) \vdash^* (\Delta_0, \hat{\$}\hat{S}\hat{B}\hat{B}\hat{A}\hat{\$}) \vdash (\Gamma_0, \hat{\$}\hat{S}\hat{B}\hat{B}\hat{A}\hat{\$}) \vdash \\ & \vdash (\Gamma_1, \hat{\$}\hat{S}\hat{B}\hat{B}\hat{A}\hat{\$}) \vdash (\Delta_1, \hat{\$}\hat{C}\hat{C}\hat{B}\hat{B}\hat{A}\hat{\$}) \vdash (\Delta_0, \hat{\$}\hat{C}\hat{C}\hat{S}\hat{B}\hat{A}\hat{\$}) \vdash^* \\ & \vdash^* (\Delta_1, \hat{\$}\hat{C}\hat{C}\hat{C}\hat{B}\hat{A}\hat{\$}) \vdash (\Delta_0, \hat{\$}\hat{C}\hat{C}\hat{C}\hat{S}\hat{A}\hat{\$}) \vdash^* (\Delta_1, \hat{\$}\hat{C}\hat{C}\hat{C}\hat{C}\hat{A}\hat{\$}) \vdash \\ & \vdash (\Delta_0, \hat{\$}\hat{C}\hat{C}\hat{C}\hat{C}\hat{S}\hat{\$}) \vdash^* (\Delta_1, \hat{\$}\hat{C}\hat{C}\hat{C}\hat{C}\hat{C}\hat{\$}) \vdash (\Gamma_0, \hat{\$}\hat{C}\hat{C}\hat{C}\hat{C}\hat{C}\hat{\$}) \end{aligned}$$

Dois questões importantes sobre as linguagens sensíveis ao contexto:

- as LSC são recursivas, isto é, existe um algoritmo para decidir se uma dada cadeia pertence ou não a uma LSC  $L$  qualquer.
- um autômato limitado linearmente determinístico tem o mesmo poder de reconhecimento de um autômato limitado linearmente não determinístico? Essa é ainda uma questão em aberto.